EXERCICE 1 **6 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

Une usine fabrique un composant électronique. Deux chaînes de fabrication sont utilisées.
La chaîne A produit 40% des composants et la chaîne B produit le reste.

Une partie des composants fabriqués présentent un défaut qui les empêche de fonctionner à la vitesse prévue par le constructeur. En sortie de chaîne A, 20% des composants présentent ce défaut alors qu'en sortie de chaîne B, ils ne sont que 5%.

On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine.

On note :

A l'événement « le composant provient de la chaîne A »

B l'événement « le composant provient de la chaîne B »

S l'événement « le composant est sans défaut »

1. Montrer que la probabilité de l'événement S est $P(S) = 0{,}89$.

2. Sachant que le composant ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il vienne de la chaîne A. On donnera le résultat à 10^{-3} près.

Partie B

Des améliorations apportées à la chaîne A ont eu pour effet d'augmenter la proportion p de composants sans défaut.

Afin d'estimer cette proportion, on prélève au hasard un échantillon de 400 composants parmi ceux fabriqués par la chaîne A.
Dans cet échantillon, la fréquence observée de composants sans défaut est de 0,92.

1. Déterminer un intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance de 95%.

2. Quelle devrait être la taille minimum de l'échantillon pour qu'un tel intervalle de confiance ait une amplitude maximum de 0,02.

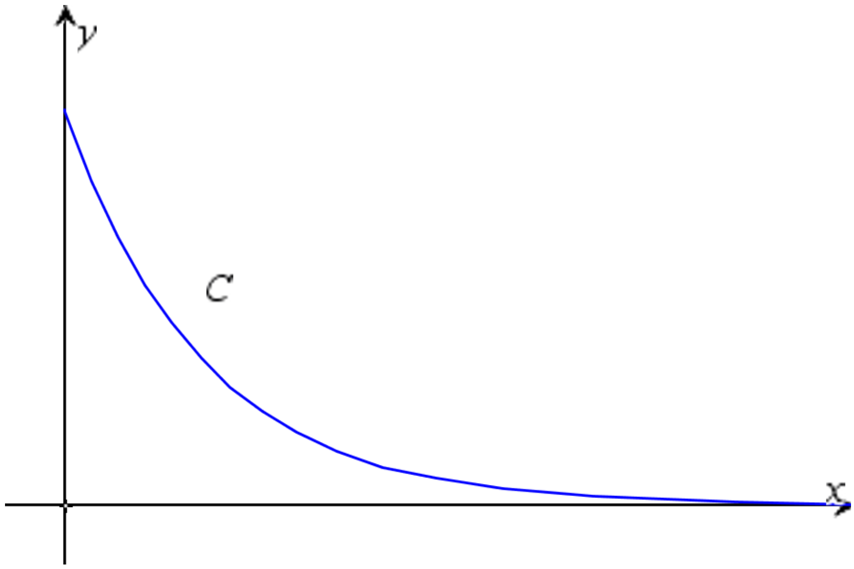
Partie C

La durée de vie, en années, d'un composant électronique fabriqué dans cette usine est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre λ (où λ est un réel strictement positif).

On note f la fonction densité associée à la variable aléatoire T. On rappelle que :

- pour tout nombre réel $x \geq 0$, $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
- pour tout nombre réel $a \geq 0$, $P(T \leq a) = \int_0^a f(x)dx$.

1. La courbe représentative C de la fonction f est donnée ci-dessous :



   a. Interpréter graphiquement $P(T \leq a)$ où $a > 0$

   b. Montrer que pour tout nombre réel $t \geq 0$: $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

   c. En déduire que $\lim\limits_{t \to +\infty} P(T \leq t) = 1$.

2. On suppose que $P(T \leq 7) = 0{,}5$. Déterminer λ à 10^{-3} près.

3. Dans cette question on prend $\lambda = 0{,}099$ et on arrondit les résultats des probabilités en centième.

   a. On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine.
   Déterminer la probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans.

   b. On choisit au hasard un composant parmi ceux qui fonctionnent encore au bout de 2 ans.
   Déterminer la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans.

   c. Donner l'espérance mathématique $E(T)$ de la variable aléatoire T à l'unité près.
   Interpréter ce résultat.

CORRECTION

EXERCICE 1 **6 points**

Partie A

Une usine fabrique un composant électronique. Deux chaînes de fabrication sont utilisées.
La chaîne A produit 40% des composants et la chaîne B produit le reste.

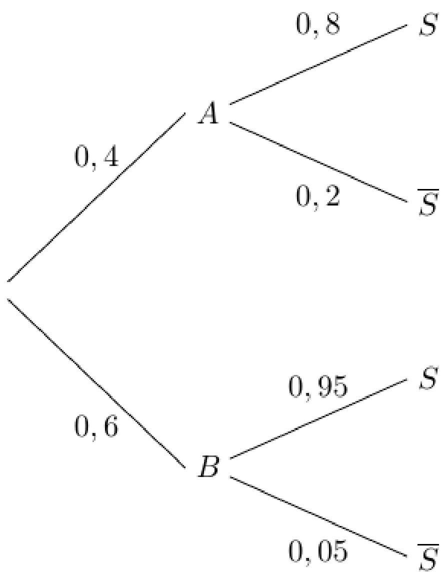
Une partie des composants fabriqués présentent un défaut qui les empêche de fonctionner à la vitesse prévue par le constructeur. En sortie de chaîne A, 20% des composants présentent ce défaut alors qu'en sortie de chaîne B, ils ne sont que 5%.

1. Montrer que la probabilité de l'événement S est $P(S) = 0,89$.

D'après l'énoncé, « la chaîne A produit 40% des composants » donc $P(A) = 0{,}4$ et « la chaîne B produit le reste » ainsi $P(B) = 0{,}6$.

De plus « En sortie de chaîne A, 20% des composants présentent ce défaut » ainsi $P_A(\bar{S}) = 0{,}2$ et « en sortie de chaîne B, ils ne sont que 5% » soit $P_B(\bar{S}) = 0{,}05$.

On en déduit l'arbre de probabilité suivant :



D'après l'arbre on a :
$P(S) = 0{,}8 \times 0{,}4 + 0{,}95 \times 0{,}6$ donc $\boldsymbol{P(S) = 0,89}$.

2. Sachant que le composant ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il vienne de la chaîne A. On donnera le résultat à 10^{-3} près.

On cherche $P_S(A)$, d'après le cours on sait que $P_S(A) = \frac{P(S\cap A)}{P(S)} = \frac{P_A(S)\times P(A)}{P(S)} = \frac{0{,}8\times 0{,}4}{0{,}89}$

Ainsi $\boldsymbol{P_S(A) \approx 0,36}$ à 10^{-2} près.

Partie B

Afin d'estimer cette proportion, on prélève au hasard un échantillon de 400 composants parmi ceux fabriqués par la chaîne A.
Dans cet échantillon, la fréquence observée de composants sans défaut est de 0,92.

1. Déterminer un intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance de 95%.

La fréquence observée de composants sans défaut est de 0,92 ainsi $f = 0{,}92$.
La taille de l'échantillon est $n = 400$.
$nf = 368$ donc $nf \geq 5$, $n(1-f) = 32$ donc $n(1-f) \geq 5$ et $n \geq 400$ les conditions d'application du théorème de l'intervalle de confiance sont satisfaites et cet intervalle est $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

$$= \left[0{,}92 - \frac{1}{\sqrt{400}}\ ; 0{,}92 - \frac{1}{\sqrt{400}}\right].$$

L'intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance de 95% est donc $[\mathbf{0,87};\mathbf{0,97}]$

---

2. Quelle devrait être la taille minimum de l'échantillon pour qu'un tel intervalle de confiance ait une amplitude maximum de 0,02.

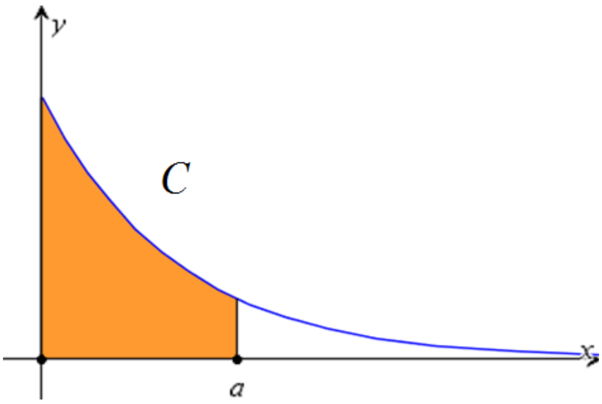
Soit n la taille de l'échantillon. Si $nf \geq 5$ et $n(1-f) \geq 5$ et $n \geq 400$ alors les conditions d'application du théorème de l'intervalle de confiance sont satisfaites et cet intervalle est $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$
L'amplitude de cet intervalle est $f + \frac{1}{\sqrt{n}} - \left(f - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{2}{\sqrt{n}}$.
Ainsi on souhaite avoir $\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0{,}02 \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq \frac{2}{0{,}02} \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 100 \Leftrightarrow n \geq 10\,000$ car n est positif.

Conclusion : La taille minimum de l'échantillon pour qu'un tel intervalle de confiance ait une amplitude maximum de 0,02 est 10 000.

Partie C

1. a. Interpréter graphiquement $P(T \leq a)$ où $a > 0$

$P(T \leq a)$ correspond à **l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisse, la courbe C et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$.**



1. b. Montrer que pour tout nombre réel $t \geq 0$: $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

D'après l'énoncé, pour tout nombre réel $t \geq 0$, $P(T \leq t) = \int_0^t f(x)dx$.
Or pour tout nombre réel $x \geq 0$, $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ on en déduit que

$$P(T \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = -e^{-\lambda t} - \left(-e^{-\lambda 0}\right) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Conclusion : $\boldsymbol{P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}}$

1. c. En déduire que $\lim\limits_{t\to+\infty} P(T \leq t) = 1$.

On sait que pour tout réel $t \geq 0$ on a $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$

$$\left.\begin{array}{r} \lambda > 0 \text{ donc } \lim\limits_{t\to+\infty} -\lambda t = -\infty \\ \lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0 \end{array}\right\} \text{par composition } \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\lambda t} = 0 \text{ ainsi } \lim\limits_{t\to+\infty} 1 - e^{-\lambda t} = 1$$

Conclusion : $\boldsymbol{\lim\limits_{t\to+\infty} P(T \leq t) = 1}$

2. On suppose que $P(T \leq 7) = 0,5$. Déterminer λ à 10^{-3} près.

$$\begin{aligned} P(T \leq 7) = 0,5 &\Leftrightarrow 1 - e^{-7\lambda} = 0,5 \text{ d'après B.1.b.} \\ &\Leftrightarrow e^{-7\lambda} = 0,5 \\ &\Leftrightarrow \ln\left(e^{-7\lambda}\right) = \ln(0,5) \text{ car les deux membres sont positifs stricts.} \\ &\Leftrightarrow -7\lambda = \ln(0,5) \\ &\Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln(0,5)}{7} \approx 0,099 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boldsymbol{\lambda = 0,099}$ **à** $\boldsymbol{10^{-3}}$ **près.**

---

3. Dans cette question on prend $\lambda = 0,099$ et on arrondit les résultats des probabilités en centième.

a. On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine.
Déterminer la probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans.

On demande $P(T \geq 5) = 1 - P(T \leq 5) = 1 - (1 - e^{-5\lambda})$ d'après B.1.b.
D'où $P(T \geq 5) = e^{-5\times 0,099}$.

Conclusion : $\boldsymbol{P(T \geq 5) = 0,61}$ au centième.

---

3. b. On choisit au hasard un composant parmi ceux qui fonctionne encore au bout de 2 ans.
Déterminer la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans.

On cherche $P_{T\geq 2}(T \geq 7)$. Or T suit une loi exponentielle qui est aussi une loi de durée de vie sans vieillissement, d'où

$$\boldsymbol{P_{T\geq 2}(T \geq 7)} = p(T \geq 5) \boldsymbol{= 0,61} \text{ d'après 3.a.}$$

---

3. c. Donner l'espérance mathématique $E(T)$ de la variable aléatoire T à l'unité près.
Interpréter ce résultat.

D'après le cours, $E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,099}$ ainsi $\boldsymbol{E(T) = 10}$ à l'unité près.
Cela signifie que la durée de vie moyenne des composants électronique est de 10 ans.
