**EXERCICE 2** **4 points**
**Commun à tous les candidats**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ on donne les points ;

$A(1,2,3)$ , $(3,0,1)$ , $C(-1,0,1)$ , $D(2,1,-1)$ , $E(-1,-2,3)$ et $F(-2,-3,4)$.

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

**Affirmation 1** : Les trois points $A, B$ et $C$ sont alignés.

**Affirmation 2** : Le vecteur $\vec{n}(0,1,-1)$ est un vecteur normal au plan $(ABC)$.

**Affirmation 3** : La droite $(EF)$ et le plan $(ABC)$ sont sécants et leur point d'intersection est le milieu du segment $[BC]$.

**Affirmation 4** : Les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont sécantes.

---

CORRECTION

**EXERCICE 2** **4 points**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ on donne les points ;

$A(1,2,3)$ , $(3,0,1)$ , $C(-1,0,1)$ , $D(2,1,-1)$ , $E(-1,-2,3)$ et $F(-2,-3,4)$.

**Affirmation 1** : ***Les trois points $A$, $B$ et $C$ sont alignés.***

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$. Cherchons si il existe un réel $k$ tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Si un tel réel existe on doit avoir : $\begin{cases}2=-2k\\-2=-2k\\-2=-2k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=-1\\k=1\\k=1\end{cases}$ impossible, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, ce qui prouve que **les points $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés**.

Conclusion : **L'affirmation 1 est fausse**.

---

**Affirmation 2** : ***Le vecteur $\vec{n}(0,1,-1)$ est un vecteur normal au plan $(ABC)$.***

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ ainsi $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 2\times 0 + (-2)\times 1 + (-2)\times(-1) = 0-2+2 = 0$

Cela prouve que $\overrightarrow{AB}\perp\vec{n}$.

De plus $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ ainsi $\overrightarrow{AC}.\vec{n} = -2\times 0 + (-2)\times 1 + (-2)\times(-1) = 0-2+2 = 0$

Cela prouve que nous avons aussi $\overrightarrow{AC}\perp\vec{n}$.

Etant donné que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires **$\vec{n}$ est un vecteur normal au plan $(ABC)$.**

Conclusion : **L'affirmation 2 est vraie**.

---

**Affirmation 3 :** ***La droite $(EF)$ et le plan $(ABC)$ sont sécants et leur point d'intersection est le milieu du segment $[BC]$.***

Déterminons une équation cartésienne du plan $(ABC)$ : On sait que $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $(ABC)$, ainsi son équation cartésienne est de la forme
$0 \times x + 1 \times y + (-1) \times z + d = 0 \Leftrightarrow y - z + d = 0$.

<u>Déterminons $d$</u> : $A \in (ABC) \Leftrightarrow \; y_A - z_A + d = 0 \Leftrightarrow 2 - 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = 1$

Ainsi $(\boldsymbol{ABC})$: $\boldsymbol{y - z + 1 = 0}$.

Soit $I$ le milieu du segment $[BC]$ alors $I\begin{pmatrix}\frac{x_B+x_C}{2}\\\frac{y_B+y_C}{2}\\\frac{z_B+z_C}{2}\end{pmatrix}$ soit $I\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$y_I - z_I + 1 = 0 - 1 + 1 = 0$ donc $I \in (ABC)$.

D'autre part $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EI}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EI} = -2\overrightarrow{EF}$ ce qui prouve que $I \in (EF)$.

Ainsi $\boldsymbol{I \in (ABC) \cap (EF)}$ avec $I$ ee milieu de $[BC]$.

Conclusion : L'affirmation 3 est vraie.

---

**Affirmation 4 :** ***Les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont sécantes.***

Déterminons si $D$ appartient au plan $(ABC)$ :
$y_D - z_D + 1 = 1 - (-1) + 1 = 3$ donc $D \notin (ABC)$ ce qui prouve que les points $A, B, C$ et $D$ ne sont pas coplanaires. Les droites $(AB)$ et $(CD)$ ne peuvent donc pas être sécantes.

Conclusion : L'affirmation 4 est fausse.

---