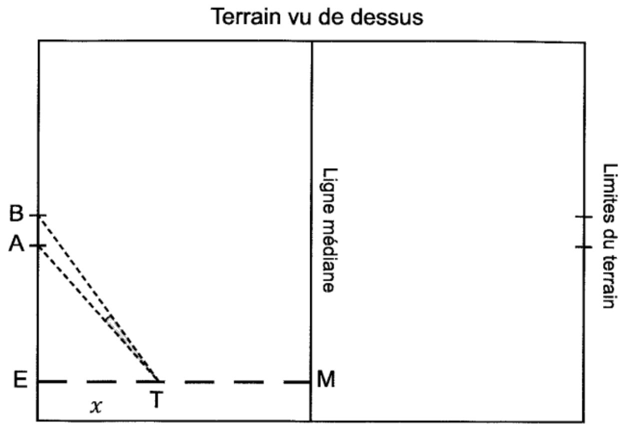
EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E (voir figure ci-contre) situé à l'extérieur du segment $[AB]$.

La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment $[EM]$ perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E. La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.



Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{ATB}$ le plus grand possible.

Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment $[EM]$ pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle. Dans toute la suite, on note x la longueur ET, qu'on cherche à déterminer.

Les dimensions du terrain sont les suivantes : $EM = 50\ m$, $EA = 25\ m$ et $AB = 5{,}6\ m$. On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETA}$, β la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETB}$ et γ la mesure en radian de l'angle $\widehat{ATB}$.

1. En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan(\alpha)$ et $\tan(\beta)$ en fonction de x.

La fonction tangente est définie sur l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

2. Montrer que la fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

3. L'angle $\widehat{ATB}$ admet une mesure γ appartenant à l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure.

   On admet que, pour tous réels a et b de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \tan b}$

   Montrer que $\tan\gamma = \frac{5{,}6x}{x^2+765}$

4. L'angle $\widehat{ATB}$ est maximum lorsque sa mesure γ est maximale. Montrer que cela correspond à un minimum sur l'intervalle $]0;50]$ de la fonction f définie par : $f(x) = x + \frac{765}{x}$.

Montrer qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et déterminer cette valeur de x au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{ATB}$ à 0,01 radian près.

Remarque : sur un terrain, un joueur de rugby ne se soucie pas d'une telle précision.

CORRECTION

EXERCICE 4 5 points

Commun à tous les candidats

1. *En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan(\alpha)$ et $\tan(\beta)$ en fonction de x.*

La fonction tangente est définie sur l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Le triangle ETA est rectangle en E donc $\tan\alpha = \frac{EA}{ET}$ soit $\boldsymbol{\tan\alpha = \frac{25}{x}}$

Le triangle ETB est rectangle en E donc $\tan\beta = \frac{EB}{ET}$ soit $\boldsymbol{\tan\beta = \frac{30{,}6}{x}}$

---

2. *Montrer que la fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.*

D'après le cours, la fonction tan est dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et on a :

Pour tout $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ qui est toujours positif strict. Ce qui prouve que la fonction **tan est strictement croissante sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$**.

---

3. *L'angle $\widehat{ATB}$ admet une mesure γ appartenant à l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure.*

On admet que, pour tous réels a et b de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \tan b}$

Montrer que $\tan\gamma = \frac{5{,}6x}{x^2+765}$

D'après l'énoncé on a $\gamma = \beta - \alpha$ or α, β et γ appartient tous à $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ ainsi en utilisant la relation de l'énoncé on a : $\tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha} = \frac{\frac{30,6}{x}-\frac{25}{x}}{1+\frac{30,6}{x}\times\frac{25}{x}} = \frac{\frac{5,6}{x}}{1+\frac{765}{x^2}}$ on en déduit que $\boldsymbol{\tan\gamma = \frac{5{,}6x}{x^2+765}}$

---

4. L'angle $\widehat{ATB}$ est maximum lorsque sa mesure γ est maximale. Montrer que cela correspond à un minimum sur l'intervalle $]0;50]$ de la fonction f définie par : $f(x)=x+\frac{765}{x}$.

Montrer qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et déterminer cette valeur de x au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{ATB}$ à $0,01$ radian près.

On sait d'après la question précédente que $\tan\gamma=\frac{5{,}6x}{x^2+765}=5{,}6\times\frac{x}{x^2+765}$

Etant donné que la fonction tan est croissante sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, on recherche la plus grande valeur de $\tan\gamma$, soit la plus grande valeur de $5{,}6\times\frac{x}{x^2+765}$. Or $\frac{x^2+765}{x}=x+\frac{765}{x}$

La fonction inverse étant décroissante, on cherche **la plus petite valeur de $x+\frac{765}{x}$ avec $x\in]0;50]$**

f est la somme de fonctions dérivables sur $]0;50]$ et on a : pour tout $x\in]0;50]$ $f'(x)=1-\frac{765}{x^2}$

Donc $f'(x)=\frac{x^2-765}{x^2}=\frac{(x-3\sqrt{85})(x+3\sqrt{85})}{x^2}$. Or $3\sqrt{85}\approx 27{,}7$ et $x\in]0;50]$ donc

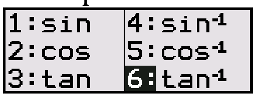
$f'(x)\geq 0$ lorsque $x\in\left[3\sqrt{85};50\right]$ et $f'(x)\leq 0$ lorsque $x\in\left[0;3\sqrt{85}\right]$.

f est décroissante sur $\left[0;3\sqrt{85}\right]$ puis croissante sur $\left[3\sqrt{85};50\right]$, ceci prouve que f admet un minimum lorsque $x=3\sqrt{85}$ soit $\boldsymbol{x\approx 28\ m}$ environ.

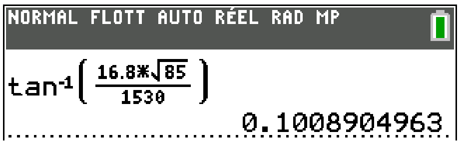
Ainsi $\widehat{ATB}$ est maximale lorsque $\tan\gamma=\frac{5{,}6\times3\sqrt{85}}{\left(3\sqrt{85}\right)^2+765}=\frac{16{,}8\sqrt{85}}{1530}$

Pour trouver la valeur de γ on utilise sa TI83 Premium CE :

On appuie sur 

puis on choisit 

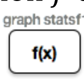
et on entre notre expression :

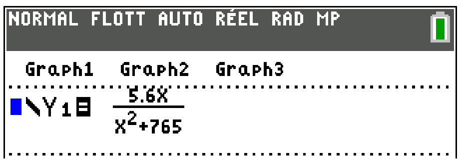


Conclusion : **La plus grande valeur de $\widehat{ATB}$ est $0,1$ rad.**

Vérifions ces résultats avec notre TI83 Premium CE :

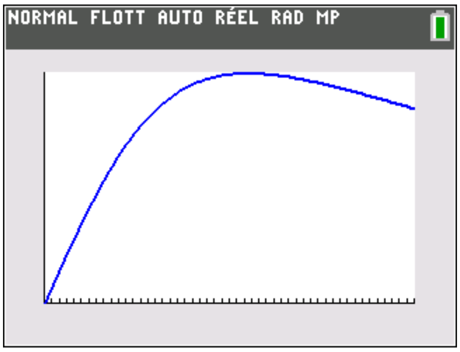
On entre la fonction f dans l'éditeur de fonctions

en appuyant sur 

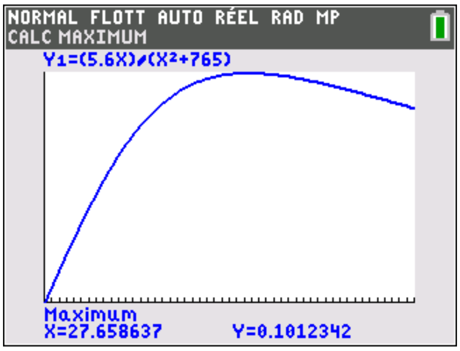


Puis on entre l'ensemble de définition en appuyant sur [déf table f2 / fenêtre].

On va utiliser le Zoom automatique en appuyant sur [format f3 / zoom] 0:AjustZoom



On va rechercher le minimum en appuyant sur [2nde] [calculs f4 / trace] et choisir 4:maximum



On retrouve bien le même résultat :