EXERCICE 3 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.

2. Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous à l'exception de la limite de f en $+\infty$ que l'on admet.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

3. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[0; 1]$, $f(x)$ appartient à $[0; 1]$.

4. On considère l'algorithme suivant :

Variables	N et A des entiers
Entrée	Saisir la valeur de A
Traitement	N prend la valeur 0 Tant que $N - \ln(N^2 + 1) < A$ N prend la valeur $N + 1$ Fin tant que
Sortie	Afficher N

a. Que fait cet algorithme ?

b. Déterminer la valeur de N fournie par l'algorithme lorsque la valeur saisie pour A est 100.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[0; 1]$.
2. Etudier les variations de la suite (u_n).
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
4. On note l sa limite, et on admet que l vérifie l'égalité $f(l) = l$.
   en déduire la valeur de l.

CORRECTION

EXERCICE 3 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.

$$f(x) = x \Leftrightarrow x - \ln(x^2+1) = x \Leftrightarrow \ln(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow x^2+1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Les solutions de l'équation $f(x) = x$ sont $S = \{0\}$.

---

2. Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous à l'exception de la limite de f en $+\infty$ que l'on admet.

La fonction $x \mapsto x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme, de plus elle est positive stricte, donc d'après le cours, la fonction $x \mapsto \ln(x^2+1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
La fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme, par différence f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $(x-1)^2 \geq 0$ et $x^2+1 > 0$ donc $f'(x) > 0$, la fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.
$f'(1) = 0$, C admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+1 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{par composition} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(x^2+1) = +\infty\end{array} \text{ ainsi } \lim\limits_{x\to-\infty} -\ln(x^2+1) = -\infty$$

$$\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$$

On en déduit par somme que $\lim\limits_{x\to-\infty} x - \ln(x^2+1) = -\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

---

3. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[0;1]$, $f(x)$ appartient à $[0;1]$.

f est croissante sur $[0;1]$ d'après 1., on a donc $0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(1)$

Or $f(0) = 0 - \ln(0^2+1) = 0$ et $f(1) = 1 - \ln(1^2+1) = 1 - \ln 2 \approx 0{,}307$ soit $f(1) \leq 1$

```
1-ln(2)
                    0.3068528194
```

Conclusion : **Pour tout $x \in [0;1]$ on a $0 \leq f(x) \leq 1$**

---

4. On considère l'algorithme suivant :

Variables	N et A des entiers
Entrée	Saisir la valeur de A
Traitement	N prend la valeur 0 Tant que $N - \ln(N^2+1) < A$ N prend la valeur $N+1$ Fin tant que
Sortie	Afficher N

a. Que fait cet algorithme ?

L'algorithme demande à l'utilisateur une valeur A puis il **affiche la plus petite valeur de $N \in \mathbb{N}$ tel que $f(N) \geq A$.**

---

4. b. Déterminer la valeur de N fournie par l'algorithme lorsque la valeur saisie pour A est 100.

Ecrivons le programme avec notre TI83 Premium CE :

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
PROGRAM:METROP
:Prompt A
:0→N
:While N-ln(N²+1)<A
:N+1→N
:End
:Disp N
```

Exécutons notre programme :
L'algorithme affiche 110.

```
prgmMETROP
A=?100
                 110
                Fait
```

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[0;1]$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n \in [0;1]$:

Initialisation : Montrons que la propriété est vraie au rang 0
On sait que $u_0 = 1$ donc $u_0 \in [0;1]$, la proposition est bien vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons que la proposition soit vraie pour un rang $n \in \mathbb{N}$ fixé, soit $u_n \in [0;1]$ et montrons que la proposition est vraie au rang $n+1$ c'est-à-dire $u_{n+1} \in [0;1]$:

D'après l'hypothèse de récurrence, $0 \leq u_n \leq 1$, or d'après A.3. on en déduit que $0 \leq f(u_n) \leq 1$ ce qui revient à dire que $0 \leq u_{n+1} \leq 1$. Ce qui prouve que $u_{n+1} \in [0;1]$.

Conclusion : D'après le principe de récurrence on a montré que **pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$**

---

2. Etudier les variations de la suite (u_n).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n = -\ln(u_n^2 + 1)$. Or $u_n^2 + 1 \geq 1$, étant donné que la fonction ln est positive sur $[1;+\infty[$ on en déduit que $\ln(u_n^2 + 1) \geq 0$ ce qui prouve que $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Conclusion **: La suite (u_n) est décroissante**.

---

3. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

D'après B.1. la suite (u_n) est minorée par 0. D'après B.2. la suite (u_n) est décroissante, donc d'après le théorème de convergence monotone, **(u_n) converge** vers $l \in \mathbb{R}$.

---

4. On note l sa limite, et on admet que l vérifie l'égalité $f(l) = l$. En déduire la valeur de l.

D'après l'énoncé, $f(l) = l \Leftrightarrow l = 0$ d'après la question A.1.

Conclusion : **(u_n) converge vers 0.**
