EXERCICE 2 **3 points**

Commun à tous les candidats

Soit a un nombre réel compris entre 0 et 1. On note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = ae^{ax} + a\,.$$

On note $I(a)$ l'intégrale de la fonction f_a entre 0 et 1 :

$$I(a) = \int_0^1 f_a(x)dx$$

1. On pose dans cette question $a = 0$. Déterminer $I(0)$.
2. On pose dans cette question $a = 1$. On étudie donc ici la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = e^x + 1\,.$$

   a. Sans étude, représenter graphiquement sur la copie la fonction f_1 dans un repère orthogonal et faire apparaître le nombre $I(1)$.

   b. Calculer la valeur exacte de $I(1)$, puis arrondir au dixième.

3. Existe-t-il une valeur de a pour alquelle $I(a)$ est égale à 2 ?

   Si oui, en donner un encadrement d'amplitude 10^{-3}.

Ce document est mis à disposition sous licence Creative Commons
http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.0/fr/

CORRECTION

EXERCICE 2 **3 points**

Commun à tous les candidats

Soit a un nombre réel compris entre 0 et 1. On note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = ae^{ax} + a\,.$$

On note $I(a)$ l'intégrale de la fonction f_a entre 0 et 1 :

$$I(a) = \int_0^1 f_a(x)dx$$

1. On pose dans cette question $a = 0$. Déterminer $I(0)$.

$$I(0) = \int_0^1 f_0(x)dx = \int_0^1 (0 \times e^{0\times x} + 0)dx = \int_0^1 0dx = 0$$

donc $\boldsymbol{I(0) = 0}$

---

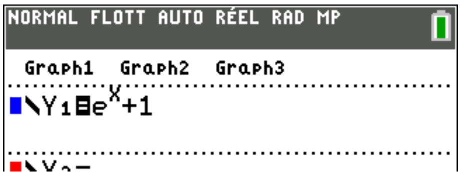
2. On pose dans cette question $a = 1$. On étudie donc ici la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boldsymbol{f_1(x) = e^x + 1\,.}$$

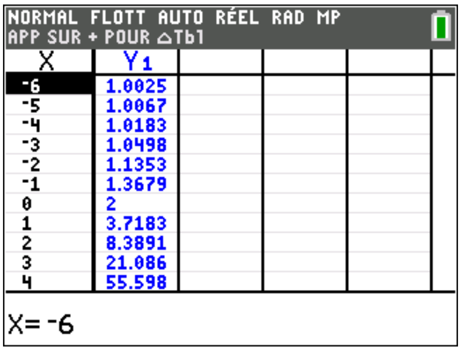
a. Sans étude, représenter graphiquement sur la copie la fonction f_1 dans un repère orthogonal et faire apparaître le nombre $I(1)$.

On va tout d'abord dresser le tableau de valeurs de la fonction f_1 :

On appuie sur [graph statsf1 / f(x)] pour entrer l'expression de la fonction :

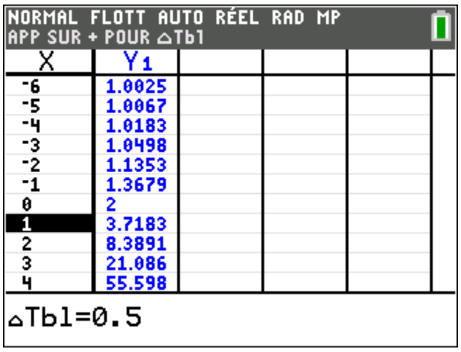


Puis on appuie sur [2nde] [table f5 / graphe] pour faire apparaître le tableau de valeurs de la fonction f_1 :

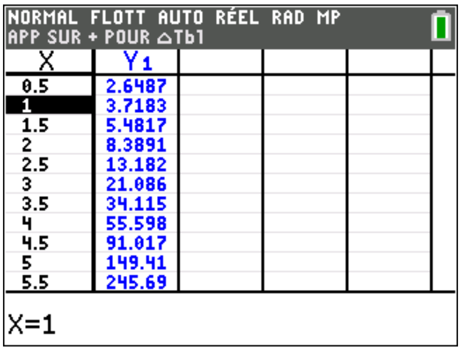


Ce document est mis à disposition sous licence Creative Commons
http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.0/fr/

Pour avoir des valeurs plus précises on peut changer le pas de la table en appuyant sur [mém +], on a choisit ici 0,5.

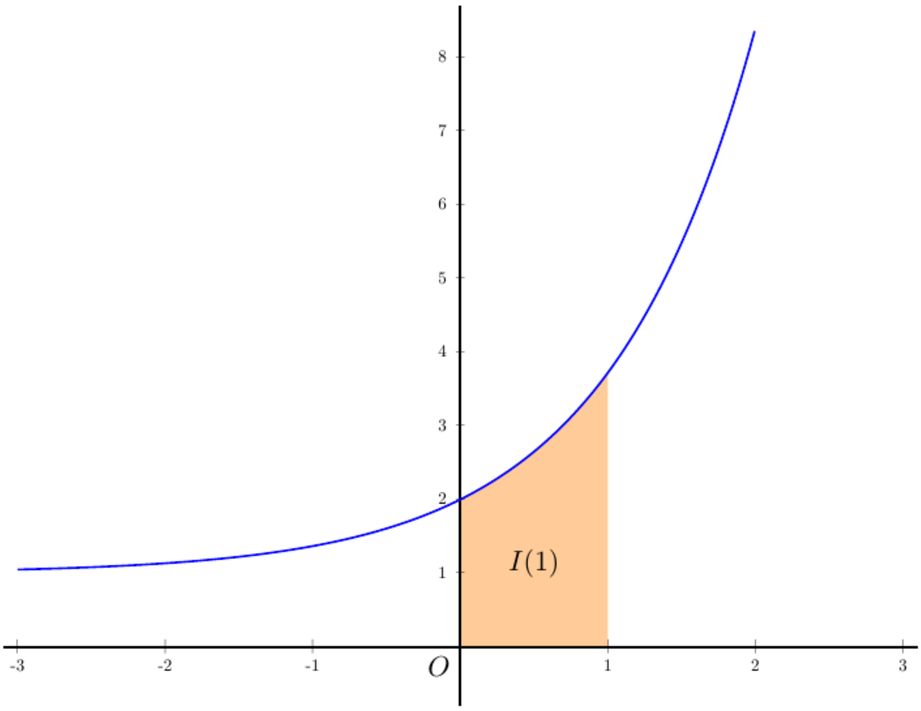


X	Y_1
-6	1.0025
-5	1.0067
-4	1.0183
-3	1.0498
-2	1.1353
-1	1.3679
0	2
1	3.7183
2	8.3891
3	21.086
4	55.598



X	Y_1
0.5	2.6487
1	3.7183
1.5	5.4817
2	8.3891
2.5	13.182
3	21.086
3.5	34.115
4	55.598
4.5	91.017
5	149.41
5.5	245.69

On peut maintenant représenter graphiquement la fonction :



Ce document est mis à disposition sous licence Creative Commons
http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.0/fr/

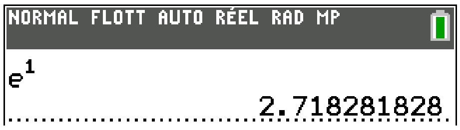
2. b. Calculer la valeur exacte de $\boldsymbol{I(1)}$*, puis arrondir au dixième.*

$$f_a(x) = ae^{ax} + a\,.$$

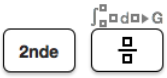
On note $\boldsymbol{I(a)}$ *l'intégrale de la fonction* f_a *entre 0 et 1 :*

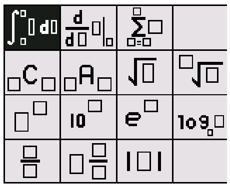
$$I(1) = \int_0^1 (e^x + 1)dx = [e^x + x]_0^1 = e^1 + 1 - (e^0 + 0)$$

Conclusion : $\boldsymbol{I(1) = e = 2,7}$ à 10^{-1} près.

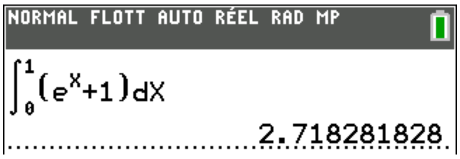


On peut aussi vérifier notre calcul intégral à l'aide de notre TI 83 Premium CE :

On appuie sur  pour utiliser l'éditeur mathématique, puis on choisit intégral.



On entre le calcul à effectuer et on obtient bien la valeur 2,718..., ce qui correspond à $\boldsymbol{e}$ et confirme bien notre calcul.



---

3. Existe-t-il une valeur de $\boldsymbol{a}$ *pour alquelle* $\boldsymbol{I(a)}$ *est égale à 2 ?*
Si oui, en donner un encadrement d'amplitude $\boldsymbol{10^{-3}}$*.*

$$I(a) = \int_0^1 (ae^{ax} + a)dx = [e^{ax} + ax]_0^1 = e^{a\times 1} + a \times 1 - (e^{a\times 0} + a \times 0) = e^a + a - 1$$

On obtient donc $I(a) = e^a + a - 1$.

Cherchons maintenant si il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $I(a) = 2$

La fonction $a \mapsto e^a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (cours) de plus la fonction $a \mapsto a - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.

Par somme la fonction I est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ $I'(a) = e^a + 1$. On sait d'après le cours que pour tout $a \in \mathbb{R}$ $e^a > 0$ donc $I'(a) > 0$.

La fonction I est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

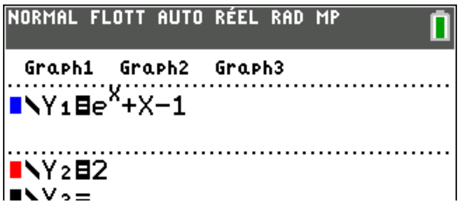
La fonction I est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc d'après le cours elle est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi I est continue et strictement croissante sur $[0; 1]$ à valeur dans $[0, e]$.

Ce document est mis à disposition sous licence Creative Commons
http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.0/fr/

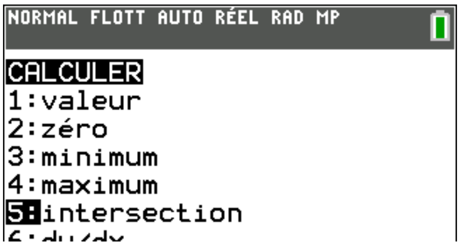
D’autre par $2 \in [0, e]$ ainsi d’après le théorème de la bijection, il existe unique $a \in [0; 1]$ tel que $I(a) = 2$.

Déterminons la valeur de a à l’aide de notre TI83 Premium CE :

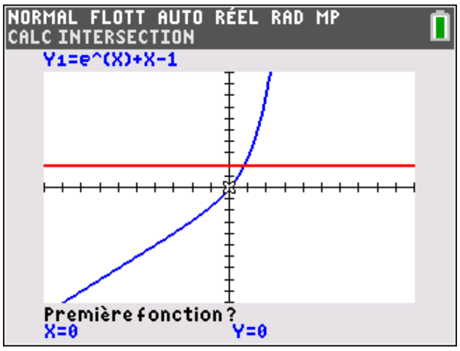
On entre l’expression de la fonction I en appuyant sur graph statsf1 f(x) puis on représente aussi graphiquement la droite d’équation $y = 2$:



On appuie maintenant sur 2nde calculs f4 trace et on choisit **intersection** :

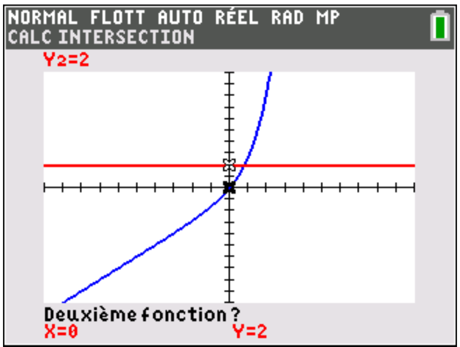


Il faut choisir la première fonction puis appuyer sur précéd entrer

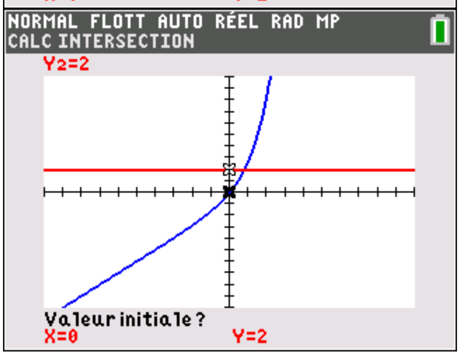


Puis on choisit la seconde fonction :

Puis on appuie sur précéd entrer



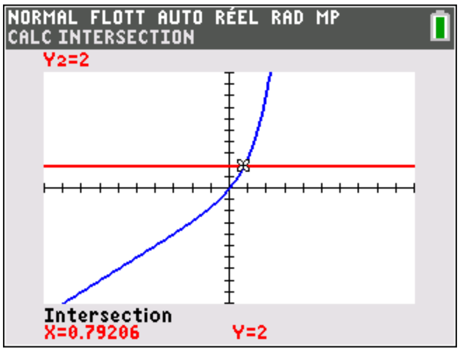
On choisit une valeur initiale relativement proche de l’abscisse du point d’intersection et on appuie sur précéd entrer



Ce document est mis à disposition sous licence Creative Commons
http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.0/fr/

On obtient comme encadrement à 10^{-3} près :

$$\mathbf{0,792 \leq a \leq 0,793}$$



Ce document est mis à disposition sous licence Creative Commons
http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.0/fr/