EXERCICE 3 **7 points**
Commun à tous les candidats

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en gramme, augmente de 20 % en un jour.
La société met en place le dispositif industriel suivant.
Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.
L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : premier modèle - avec une suite

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la manière suivante :

$$u_0 = 1000 \text{ et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 1{,}2u_n - 100.$$

1. a) Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé.
   On précisera en particulier ce que représente u_n .
   b) L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.
   c) On peut également utiliser l'algorithme suivant pour répondre au problème posé dans la question précédente.
   Recopier et compléter cet algorithme.

Variables	u et n sont des nombres
Traitement	u prend la valeur 1000 n prend la valeur 0 Tant que .... faire u prend la valeur .... n prend la valeur $n + 1$ Fin Tant que
Sortie	Afficher ....

2. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1000$.
   b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
3. On définit la suite (v_n) par: pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   b) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.
   c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie B : second modèle - avec une fonction

On constate qu'en pratique la masse de bactéries dans la cuve ne dépasse jamais 50 kg. Cela conduit à étudier un second modèle dans lequel la masse de bactéries est modélisée par la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(t)=\frac{50}{1+49e^{-0,2t}}$$

où t représente le temps exprimé en jour et où $f(t)$ représente la masse, exprimée en kg, de bactéries au temps t.

1. a) Calculer $f(0)$.
   b) Démontrer que, pour tout réel $t \geq 0$, $f(t) < 50$.
   c) Étudier le sens de variation de la fonction .
   d) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Interpréter les résultats de la question 1 par rapport au contexte.
3. En utilisant ce modèle, on cherche à savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg.
   Résoudre l'inéquation d'inconnue t : $f(t) > 30$.
   En déduire la réponse au problème.

Partie C : un contrôle de qualité

Les bactéries peuvent être de deux types : le type A, qui produit effectivement une protéine utile à l'industrie, et le type B, qui ne la produit pas et qui est donc inutile d'un point de vue commercial.

L'entreprise affirme que 80 % des bactéries produites sont de type A.

Pour vérifier cette affirmation, un laboratoire analyse un échantillon aléatoire de 200 bactéries en fin de production. L'analyse montre que 146 d'entre elles sont de type A.
L'affirmation de l'entreprise doit-elle être remise en cause ?

CORRECTION

EXERCICE 3 **7 points**

Commun à tous les candidats

Partie A : premier modèle - avec une suite

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la manière suivante :

$$u_0 = 1000 \textit{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 1,2u_n - 100.$$

1. a) Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé.
On précisera en particulier ce que représente u_n .

Le jour n, il y a u_n g de bactéries. Le jour suivant, soit le jour $n+1$, la masse de bactéries augmente de 20%, elle vaudra donc $1{,}2u_n$. Or pendant le remplacement du milieu nutritif, 100 g de bactéries sont perdus. La masse sera donc de $1{,}2u_n - 100$

Conclusion : $u_{n+1} = 1,2u_n - 100$ et d'autre part, la masse initiale de bactéries est 1kg soit $u_0 = 1000$ g.

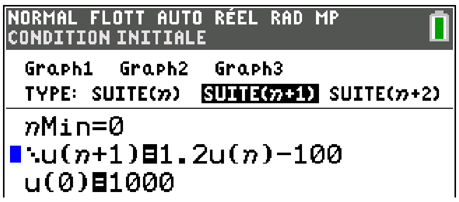
Le modèle correspond à la situation de l'énoncé.

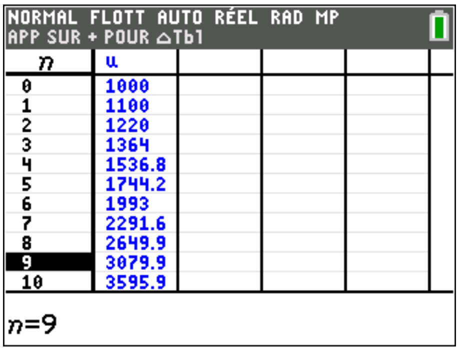
---

1. b) L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

Pour trouver la valeur de n, on utilise sa TI83 Premium CE :
Tout d'abord il faut mettre sa calculatrice en mode suite en appuyant sur [mode] (quitter)
On entre l'expression de la suite en appuyant sur [f(x)] (graph statsf1) .
On sélectionne **SUITE(n+1)**
$\boldsymbol{n}$ est obtenu en appuyant sur [X,T,θ,n] (échanger) et $\boldsymbol{u}$ en appuyant sur [2nde] [7] (u_n O)

On appuie sur [2nde] [graphe] (table f5) pour afficher la tableau de valeurs de la suite.
En on constate qu'à partir de $n = 9$ jours, la masse de bactéries dépasse 30kg.





---

1. c) On peut également utiliser l'algorithme suivant pour répondre au problème posé dans la question précédente.
Recopier et compléter cet algorithme.

Variables	u et n sont des nombres
Traitement	u prend la valeur 1000 n prend la valeur 0 Tant que $\boldsymbol{u < 3000}$ faire u prend la valeur $\boldsymbol{1,2u - 100}$ n prend la valeur $n + 1$ Fin Tant que
Sortie	Afficher $\boldsymbol{n}$

---

2. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1000$.

Initialisation : Montrons que la proposition est vraie au rang 0 :
$u_0 = 1000$ on a donc bien $u_0 \geq 1000$.
La proposition est donc vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons que pour un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq 1000$ et montrons que $u_{n+1} \geq 1000$

D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n \geq 1000$ donc $1{,}2u_n - 100 \geq 1200 - 100$ soit $u_{n+1} \geq 1100 \geq 1000$ ce qui prouve que $u_{n+1} \geq 1000$

La proposition est donc vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : On a démontré que **pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq 1000$**.

---

2. b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Pour tout $\in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 1{,}2u_n - 100 - u_n = 0{,}2u_n - 100$.

Or d'après 2.a. on a $u_n \geq 1000$ ainsi $0{,}2u_n \geq 200$ d'où $0{,}2u_n - 100 \geq 200 - 100$

Ce qui prouve que $u_{n+1} - u_n \geq 100 > 0$, la suite **(u_n) est croissante**.

---

3. On définit la suite (v_n) par: pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 500$

$= 1{,}2u_n - 100 - 500$ car $u_{n+1} = 1{,}2u_n - 100$

$= 1{,}2u_n - 600$

$= 1{,}2(v_n + 500) - 600$ car $u_n = v_n + 500$

$= 1{,}2v_n + 600 - 600$

$= 1{,}2v_n$

La suite (v_n) est géométrique de raison 1,2 et de premier terme $v_0 = u_0 - 500$ soit $\boldsymbol{v_0 = 500}$

---

3. b) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

D'après le cours, (v_n) est une suite géométrique de raison 0,2 donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_n = v_0 \times 1{,}2^n$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{v_n = 500 \times 1{,}2^n}$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n = 500 \times 1{,}2^n + 500}$

---

3. c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

D'après le cours, si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

En particulier, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1{,}2^n = +\infty$ ce qui prouve que $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$.

Partie B : second modèle - avec une fonction

On constate qu'en pratique la masse de bactéries dans la cuve ne dépasse jamais 50 kg. Cela conduit à étudier un second modèle dans lequel la masse de bactéries est modélisée par la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{50}{1 + 49e^{-0{,}2t}}$$

où t représente le temps exprimé en jour et où $f(t)$ représente la masse, exprimée en kg, de bactéries au temps t.

1. a) Calculer $f(0)$.

$f(0) = \frac{50}{1+49e^{-0{,}2\times 0}} = \frac{50}{1+49}$ soit $\boldsymbol{f(0) = 1}$

---

1. b) Démontrer que, pour tout réel $t \geq 0$, $f(t) < 50$.

Pour tout $t \geq 0$ on a $e^{-0,2t} > 0$,

$$\begin{aligned} 49e^{-0,2t} &> 0 \\ 1 + 49\,e^{-0,2t} &> 1 \\ \frac{1}{1+49e^{-0,2t}} &< 1 \quad \text{car la fonction inverse est strictement décroissante sur }]0;+\infty[\\ \frac{50}{1+49e^{-0,2t}} &< 50 \end{aligned}$$

Conclusion : **Pour tout $t \geq 0$ on a $(t) < 50$** .

---

1. c) Étudier le sens de variation de la fonction f.

La fonction $t \mapsto -0,2t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc d'après le cours, la fonction $t \mapsto e^{-0,2t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction $t \mapsto 1 + 49e^{-0,2t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ qui est positive stricte, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = 50 \times \left(-\frac{49\times(-0,2)e^{-0,2t}}{(1+49e^{-0,2t})^2}\right)$ soit $f'(t) = \frac{490e^{-0,2t}}{(1+49e^{-0,2t})^2}$ qui est toujours positif strict.

Conclusion : **f est croissante sur $\mathbb{R}$**.

---

1. d) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} -0,2t &= -\infty \\ \lim_{t\to-\infty} e^{t} = 0 &\quad (cours) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &par\ composition \\ &\lim_{t\to+\infty} e^{-0,2t} = 0 \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\lim_{t\to+\infty} 1 + 49e^{-0,2t} = 1 \text{ d'où } \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{1+49e^{-0,2t}} = 1$$

Conclusion : $\boldsymbol{\lim_{t\to+\infty} f(t) = 50}$

---

2. Interpréter les résultats de la question 1 par rapport au contexte.

D'après 1.a. : $f(0) = 1$, cela signifie que la masse initiale de bactéries est de 1kg.

D'après 1.b. pour tout $t \geq 0$ on a $f(t) < 50$. Donc la masse de bactéries ne dépassera jamais 50 kg.

1.c. nous dit que f est croissante sur $\mathbb{R}$ donc la masse de bactéries est en constante augmentation.

Et enfin d'après 1.d. $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 50$ donc la masse de bactéries se rapproche de plus en plus de 50kg mais sans dépasser cette masse.

---

3. En utilisant ce modèle, on cherche à savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg.
Résoudre l'inéquation d'inconnue t : $f(t) > 30$.
En déduire la réponse au problème.

$$\begin{aligned}
f(t) &> 30 \\
\frac{50}{1+49e^{-0,2t}} &> 30 \\
1 + 49\,e^{-0,2t} &< \frac{5}{3} \quad \text{car la fonction inverse est strictement décroissante sur }]0;+\infty[\\
49\,e^{-0,2t} &< \frac{2}{3} \\
e^{-0,2t} &< \frac{2}{147} \\
\ln(e^{-0,2t}) &< \ln\left(\frac{2}{147}\right) \quad \text{car la fonction ln est strictement croissante sur }]0;+\infty[\\
-0,2t &< \ln\left(\frac{2}{147}\right) \\
t &> -\frac{\ln\left(\frac{2}{147}\right)}{0,2}
\end{aligned}$$

On en déduit que la masse des bactéries dépassera 30kg au bout de 22 jours.

Partie C : un contrôle de qualité

Les bactéries peuvent être de deux types : le type A, qui produit effectivement une protéine utile à l'industrie, et le type B, qui ne la produit pas et qui est donc inutile d'un point de vue commercial.

L'entreprise affirme que 80 % des bactéries produites sont de type A.

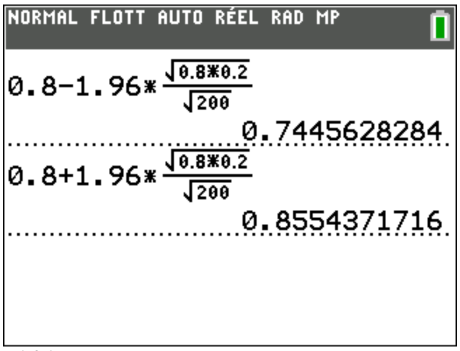
Pour vérifier cette affirmation, un laboratoire analyse un échantillon aléatoire de 200 bactéries en fin de production. L'analyse montre que 146 d'entre elles sont de type A.
L'affirmation de l'entreprise doit-elle être remise en cause ?

La taille de l'échantillon est $n = 200$ donc $n \geq 30$. La proportion de bactéries de type A est, selon l'entreprise, $p = 0{,}8$. Ainsi $np = 160$ soit $np \geq 5$ et $n(1-p) = 40$ soit $n(1-p) \geq 5$.
Les conditions d'application du théorème de l'intervalle de fluctuation au niveau de 95% sont satisfaites.

Ainsi on a $I = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ; p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$

$I = \left[0{,}8 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}8(1-0{,}8)}}{\sqrt{200}} ; 0{,}8 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}8(1-0{,}8)}}{\sqrt{200}}\right]$

$I = [0{,}744; 0{,}856]$



Or la fréquence de bactéries de type A de l'échantillon est $f = \frac{146}{200} = 0{,}73$

$0{,}73 \notin [0{,}744; 0{,}856]$ donc **l'affirmation de l'entreprise peut être remise en cause**.