EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Un catadioptre est un dispositif optique formé de trois miroirs disposés en forme de « coin de cube», les faces réfléchissantes tournées vers l'intérieur. On en trouve dans les réflecteurs de certains véhicules ainsi que dans les appareils de topographie.

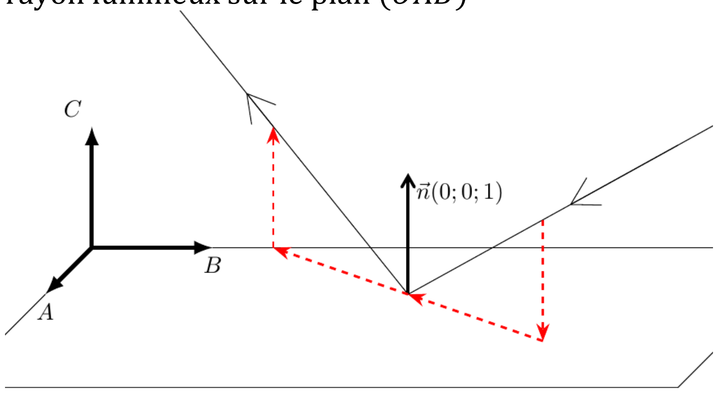
Les points O, A, B et C sont des sommets d'un cube, de telle sorte que le repère $\left(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$ soit un repère orthonormé. On utilisera ce repère dans tout l'exercice.

Les trois miroirs du catadioptre sont représentés par les plans (OAB), (OBC) et (OAC). Les rayons lumineux sont modélisés par des droites.

Règles de réflexion d'un rayon lumineux (admises) :

- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}(a; b; c)$ est réfléchi par le plan (OAB), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\vec{v}'(a; b; -c)$;
- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}(a; b; c)$ est réfléchi par le plan (OBC), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\vec{v}'(-a; b; c)$;
- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}(a; b; c)$ est réfléchi par le plan (OAC), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\vec{v}'(a; -b; c)$.

Vue en perspective cavalière de la réflexion d'un rayon lumineux sur le plan (OAB)



1. *Propriété des catadioptres.*
   En utilisant les règles précédentes, démontrer que si un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}(a; b; c)$ est réfléchi successivement par les plans (OAB), (OBC) et (OAC), le rayon final est parallèle au rayon initial.

Pour la suite, on considère un rayon lumineux modélisé par une droite d_1 de vecteur directeur $\vec{v}_1(-2; -1; -1)$ qui vient frapper le plan (OAB) au point $I_1(2; 3; 0)$. Le rayon réfléchi est modélisé par la droite d_2 de vecteur directeur $\vec{v}_2(-2; -1; 1)$ et passant par le point I_1.

2. Réflexion de d_2 sur le plan (OBC).
   a) Donner une représentation paramétrique de la droite d_2.
   b) Donner, sans justification, un vecteur normal au plan (OBC) et une équation cartésienne de ce plan.
   c) Soit I_2 le point de coordonnées $(0; 2; 1)$. Vérifier que le plan (OBC) et la droite d_2 sont sécants en I_2.

On note d_3 la droite qui représente le rayon lumineux après réflexion sur le plan (OBC). d_3 est donc la droite de vecteur directeur $\vec{v}_3(2; -1; 1)$ passant par le point $I_2(0; 2; 1)$.

3. *Réflexion de d_3 sur le plan (OAC).*
Calculer les coordonnées du point d'intersection I_3 de la droite d_3 avec le plan (OAC).
On note d_4 la droite qui représente le rayon lumineux après réflexion sur le plan (OAC). Elle est donc parallèle à la droite d_1.

4. *Étude du trajet de la lumière.*
On donne le vecteur $\vec{u}(1; -2; 0)$, et on note $\mathcal{P}$ le plan défini par les droites d_1 et d_2.

a) Démontrer que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

b) Les droites d_1, d_2 et d_3 sont-elles situées dans un même plan ?

c) Les droites d_1, d_2 et d_4 sont-elles situées dans un même plan?

CORRECTION

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Un catadioptre est un dispositif optique formé de trois miroirs disposés en forme de « coin de cube», les faces réfléchissantes tournées vers l'intérieur. On en trouve dans les réflecteurs de certains véhicules ainsi que dans les appareils de topographie.

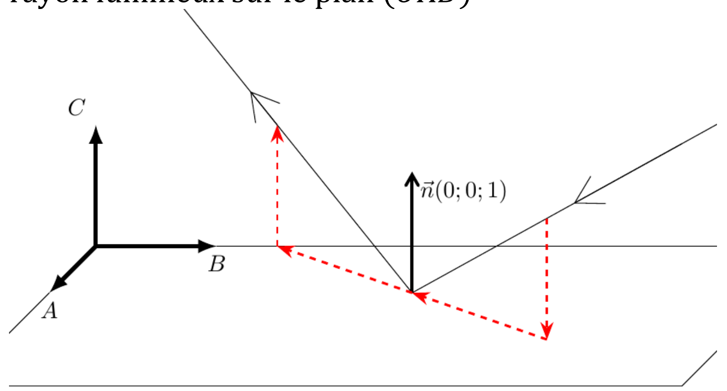
Les points O, A, B et C sont des sommets d'un cube, de telle sorte que le repère $\left(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$ soit un repère orthonormé. On utilisera ce repère dans tout l'exercice.

Les trois miroirs du catadioptre sont représentés par les plans (OAB), (OBC) et (OAC). Les rayons lumineux sont modélisés par des droites.

Règles de réflexion d'un rayon lumineux (admises) :

- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}(a; b; c)$ est réfléchi par le plan (OAB), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\vec{v}'(a; b; -c)$;
- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}(a; b; c)$ est réfléchi par le plan (OBC), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\vec{v}'(-a; b; c)$;
- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}(a; b; c)$ est réfléchi par le plan (OAC), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\vec{v}'(a; -b; c)$.

Vue en perspective cavalière de la réflexion d'un rayon lumineux sur le plan (OAB)



1. Propriété des catadioptres.

En utilisant les règles précédentes, démontrer que si un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}; \boldsymbol{c})$ est réfléchi successivement par les plans $(\boldsymbol{OAB})$, $(\boldsymbol{OBC})$ et $(\boldsymbol{OAC})$, le rayon final est parallèle au rayon initial.

Si un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}(a; b; c)$ est réfléchi par le plan (OAB) alors le vecteur directeur du rayon réfléchi est $\vec{v}'(a; b; -c)$.

Puis le vecteur directeur du rayon réfléchi par le plan (OBC) est $\vec{v}''(-a; b; -c)$.

Et enfin le vecteur directeur du rayon réfléchi par le plan (OAC) est $\vec{v}'''(-a; -b; -c)$ soit $-\vec{v}$ qui a la même direction que $\vec{v}$.

Conclusion : Le rayon final est parallèle au rayon initial.

Pour la suite, on considère un rayon lumineux modélisé par une droite $\mathbf{d_1}$ de vecteur directeur $\vec{v}_1(-2;-1;-1)$ qui vient frapper le plan (OAB) au point $I_1(2;3;0)$. Le rayon réfléchi est modélisé par la droite $\mathbf{d_2}$ de vecteur directeur $\vec{v}_2(-2;-1;1)$ et passant par le point I_1.

2. Réflexion de $\mathbf{d_2}$ sur le plan (OBC).

a) Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathbf{d_2}$.

On sait que $I_1\begin{vmatrix}2\\3\\0\end{vmatrix}, \vec{v}_2\begin{vmatrix}-2\\-1\\1\end{vmatrix}$ et d_2 est la droite admettant $\vec{v}_2$ comme vecteur directeur et passant par I_1.

$M\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix} \in d_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{I_1M}$ et $\vec{v}_2$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ il existe un réel k tel que $\overrightarrow{I_1M} = k\vec{v}_2 \Leftrightarrow \begin{cases}x-2=-2k\\y-3=-k\\z=k\end{cases}$

d_2 admet comme équation paramétrique : $\boldsymbol{d_2} : \begin{cases}\boldsymbol{x = 2-2k}\\\boldsymbol{y = 3-k}\\\boldsymbol{z = k}\end{cases}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$

---

2. b) Donner, sans justification, un vecteur normal au plan (OBC) et une équation cartésienne de ce plan.

$\overrightarrow{OA}\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}$ est un vecteur normale du plan (OBC).

(OBC) admet une équation du type : $1\times x + 0\times y + 0\times z + d = 0 \Leftrightarrow x + d = 0$.

Déterminons d : On sait que $O \in (OBC)$ donc $x_O + d = 0 \Leftrightarrow 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$.

Conclusion : **(OBC): $x = 0$**.

---

2. c) Soit $\mathbf{I_2}$ le point de coordonnées $(0;2;1)$. Vérifier que le plan (OBC) et la droite $\mathbf{d_2}$ sont sécants en $\mathbf{I_2}$.

$M\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix} \in (OBC)\cap d_2 \Leftrightarrow \begin{cases}x=2-2k\\y=3-k\\z=k\\x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2-2k\\y=3-k\\z=k\\2-2k=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=2\\z=1\\k=1\end{cases}$

Conclusion : **(OBC) et d_2 sont sécants en $I_2\begin{vmatrix}0\\2\\1\end{vmatrix}$**

On note d_3 la droite qui représente le rayon lumineux après réflexion sur le plan (OBC). d_3 est donc la droite de vecteur directeur $\vec{v}_3(2;-1;1)$ passant par le point $I_2(0;2;1)$.

3. Réflexion de d_3 sur le plan (OAC).
Calculer les coordonnées du point d'intersection I_3 de la droite d_3 avec le plan (OAC).

d_3 est la droite passant par $I_2\left|\begin{matrix}0\\2\\1\end{matrix}\right.$ et admettant $\vec{v}_3\left|\begin{matrix}2\\-1\\1\end{matrix}\right.$ comme vecteur directeur.

Donc d_3 : $\begin{cases} x = 2k \\ y = 2-k \\ z = 1+k \end{cases}$. De plus $(OAC)\colon y = 0$.

$I_3\left|\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}\right. \in (OAC)\cap d_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k \\ y = 2-k \\ z = 1+k \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k \\ y = 2-k \\ z = 1+k \\ 2-k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \\ z = 3 \\ k = 2 \end{cases}$

Conclusion : **(OAC) et d_3 sont sécants en $I_3\left|\begin{matrix}4\\0\\3\end{matrix}\right.$**

On note d_4 la droite qui représente le rayon lumineux après réflexion sur le plan (OAC). Elle est donc parallèle à la droite d_1.

4. Étude du trajet de la lumière.
On donne le vecteur $\vec{u}(1;-2;0)$, et on note $\mathcal{P}$ le plan défini par les droites d_1 et d_2.

a) Démontrer que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

$\vec{v}_1\left|\begin{matrix}-2\\-1\\-1\end{matrix}\right.$ est un vecteur directeur de d_1 et $\vec{v}_1.\vec{u} = -2\times 1 + (-1)\times(-2) + (-1)\times 0 = 0$ donc $\vec{v}_1 \perp \vec{u}$

$\vec{v}_2\left|\begin{matrix}-2\\-1\\1\end{matrix}\right.$ est un vecteur directeur de d_1 et $\vec{v}_2.\vec{u} = -2\times 1 + (-1)\times(-2) + 1\times 0 = 0$ donc $\vec{v}_2 \perp \vec{u}$

$\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$ donc $\vec{u}$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$

---

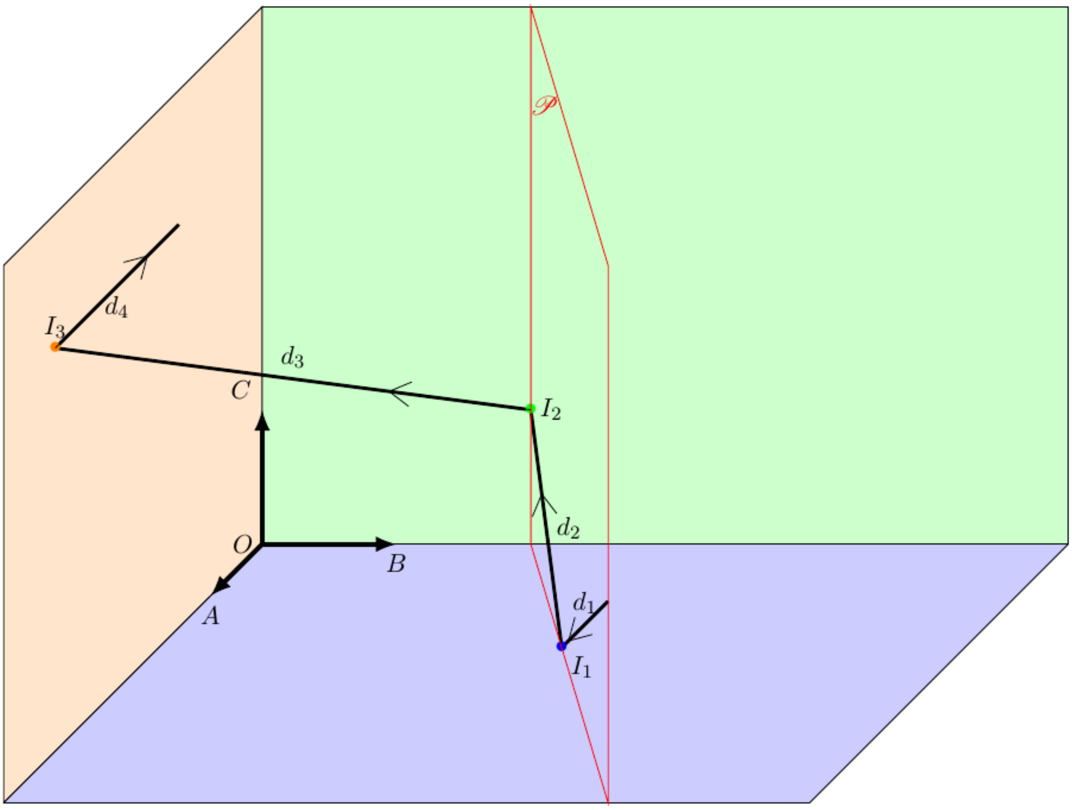
4. b) Les droites d_1, d_2 et d_3 sont-elles situées dans un même plan ?

Le plan $\mathcal{P}$ contient les droites d_1 et d_2. Si d_1, d_2 et d_3 sont situées dans un même plan, alors ce sera le plan $\mathcal{P}$.

$\vec{v}_3 \left| \begin{array}{l} 2 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right.$ est un vecteur directeur de la droite d_3.

$\vec{v}_3.\vec{u} = 2 \times 1 + (-1) \times (-2) + 1 \times 0 = 4 \neq 0$ donc $\vec{v}_3$ et $\vec{u}$ ne sont pas orthogonaux ce qui prouve que d_3 n'est pas une droite du plan $\mathcal{P}$.

Conclusion : **d_1, d_2 et d_3 ne sont pas situées dans un même plan**.



4. c) Les droites d_1, d_2 et d_4 sont-elles situées dans un même plan?

Le plan $\mathcal{P}$ contient les droites d_1 et d_2. Si d_1, d_2 et d_4 sont situées dans un même plan, alors ce sera le plan $\mathcal{P}$.

d_4 est la droite passant par $I_3 \begin{vmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{vmatrix}$ et admettant $\vec{v}_4 \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ comme vecteur directeur.

$\vec{u} \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{vmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Donc $\mathcal{P}$ admet une équation du type $1 \times x - 2 \times y + 0 \times z + d = 0$.

Soit $\mathcal{P}$: $x - 2y + d = 0$.

Calculons d : $I_1 \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{vmatrix} \in \mathcal{P}$. Ainsi $x_{I_1} - 2y_{I_1} + d = 0$

$\Leftrightarrow 2 - 6 + d = 0 \Leftrightarrow d = 4$.

On trouve donc $\mathcal{P}$: $x - 2y + 4 = 0$.

Cherchons si le point $I_3 \begin{vmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{vmatrix}$ appartient au plan $\mathcal{P}$:

$x_{I_3} - 2y_{I_3} + 4 = 4 + 0 + 4 = 8 \neq 0$ donc $I_3 \notin \mathcal{P}$.

Ce qui prouve que **les droites d_1, d_2 et d_4 ne sont pas situées dans un même plan**.

Donnons un autre angle de vue pour la figure :