EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Un maraîcher est spécialisé dans la production de fraises.
Cet exercice envisage dans la partie A la production de fraises et dans la partie B leur conditionnement.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : production de fraises

Le maraîcher produit ses fraises dans deux serres notées A et B ; 55 % des fleurs de fraisier se trouvent dans la serre A, et 45 % dans la serre B. Dans la serre A, la probabilité pour chaque fleur de donner un fruit est égale à 0,88 ; dans la serre B, elle est égale à 0,84.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Proposition 1 :

La probabilité qu'une fleur de fraisier, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit est égale à 0,862.

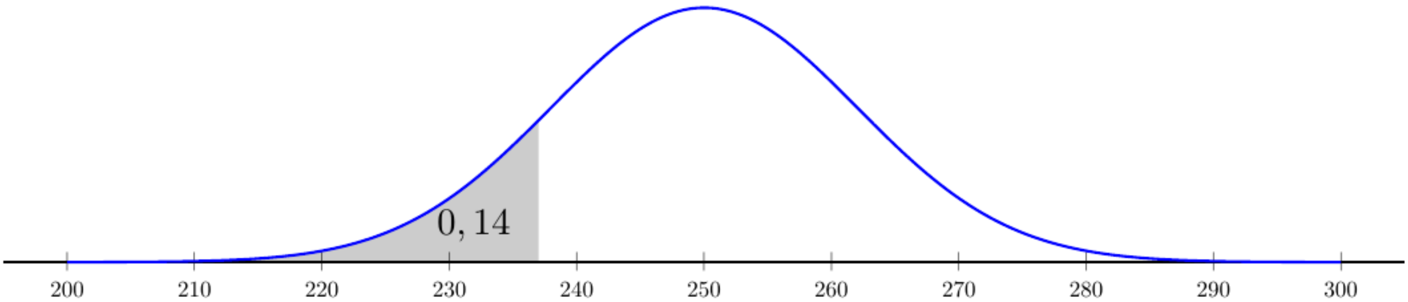
Proposition 2 :

On constate qu'une fleur, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit.
La probabilité qu'elle soit située dans la serre A, arrondie au millième, est égale à 0,439.

Partie B : conditionnement des fraises

Les fraises sont conditionnées en barquettes. La masse (exprimée en gramme) d'une barquette peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type σ.

La représentation graphique de la fonction densité de la loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée ci-après :



1. On donne $P(X \leq 237) = 0{,}14$. Calculer la probabilité de l'événement« la masse de la barquette est comprise entre 237 et 263 grammes ».

2. On note Y la variable aléatoire définie par : $Y = \frac{X-250}{\sigma}$.

   a) Quelle est la loi de la variable aléatoire Y?

   b) Démontrer que $P\left(Y \leq -\frac{13}{\sigma}\right) = 0{,}14$.

   c) En déduire la valeur de σarrondie à l'entier.

3. Dans cette question, on admet que σ vaut 12. On désigne par n et m des nombres entiers.

   a) Une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme, se trouve dans l'intervalle $[250 - n; 250 + n]$. Déterminer la plus petite valeur de n pour qu'une barquette soit conforme, avec une probabilité supérieure ou égale à 95 %.

   b) On considère dans cette question qu'une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme, se trouve dans l'intervalle $[230; m]$. Déterminer la plus petite valeur de m pour qu'une barquette soit conforme, avec une probabilité supérieure ou égale à 95 %.

CORRECTION

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A : production de fraises

Le maraîcher produit ses fraises dans deux serres notées A et B ; 55 % des fleurs de fraisier se trouvent dans la serre A, et 45 % dans la serre B. Dans la serre A, la probabilité pour chaque fleur de donner un fruit est égale à 0,88 ; dans la serre B, elle est égale à 0,84.

Proposition 1 :

La probabilité qu'une fleur de fraisier, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit est égale à 0,862.

On note :
A l'événement : « les fleurs de fraisier se trouvent dans la serre A ».
B l'événement : « les fleurs de fraisier se trouvent dans la serre B ».
F l'événement : « la fleur donne un fruit ».

D'après l'énoncé, « la serre A fournit 55 % des fleurs de fraisier » donc

$$p(A) = 0{,}55$$

Et « la serre B fournit 45 % des fleurs de fraisier» d'où

$$p(B) = 0{,}45$$

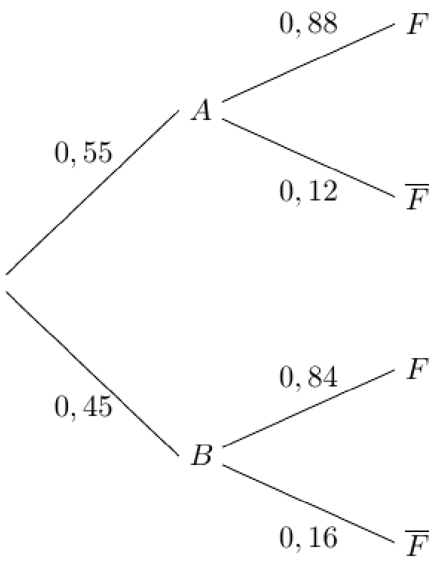
De plus « dans la serre A, la probabilité pour chaque fleur de donner un fruit est égale à 0,88 » soit

$$p_A(F) = 0{,}88$$

Et enfin « dans la serre B, elle est égale à 0,84.» ce qui donne

$$p_B(F) = 0{,}84$$

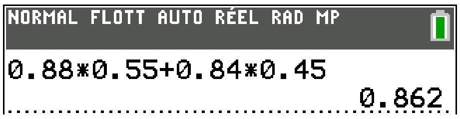
On construit l'arbre pondéré correspondant à cette situation ci-contre :



On cherche $p(F)$, d'après l'arbre on a :

$$p(F) = 0{,}88 \times 0{,}55 + 0{,}84 \times 0{,}45$$

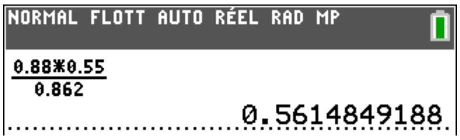
Donc **$p(F) = 0{,}862$, la proposition 1 est vraie.**



Proposition 2 :

On constate qu'une fleur, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit.
La probabilité qu'elle soit située dans la serre A, arrondie au millième, est égale à 0,439.

On cherche $p_F(A)$.
On a d'après le cours $p_F(A) = \frac{p(F\cap A)}{p(\bar{F})} = \frac{0{,}88\times 0{,}55}{0{,}862}$
Donc $\boldsymbol{p_F(A) = 0,561}$ à 10^{-3} près.



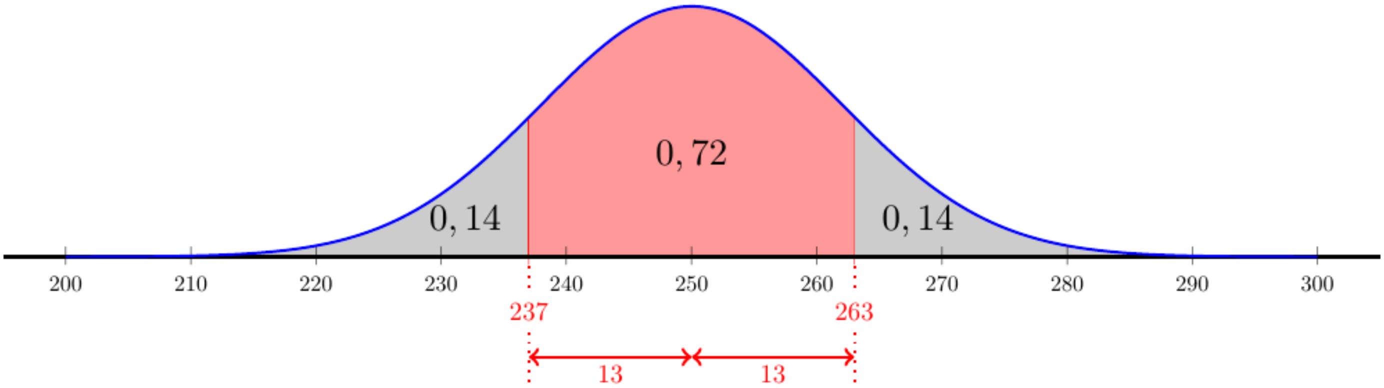
La proposition 2 est fausse.

Partie B : conditionnement des fraises

Les fraises sont conditionnées en barquettes. La masse (exprimée en gramme) d'une barquette peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type σ.

1. ***On donne $P(X \leq 237) = 0,14$. Calculer la probabilité de l'événement« la masse de la barquette est comprise entre 237 et 263 grammes ».***

On sait que $(X \leq 250 - 13) = 0{,}14$, par symétrie de la loi normale par rapport à la moyenne $\mu = 250$, on en déduit que $P(X \geq 250 + 13) = 0{,}14$ soit $P(X \geq 263) = 0{,}14$.



Ainsi $P(237 \leq X \leq 263) = 1 - 0{,}14 - 0{,}14$ donc $\boldsymbol{P(237 \leq X \leq 263) = 0,72}$.

2. On note Y la variable aléatoire définie par : $Y = \frac{X-250}{\sigma}$.

a) Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?

X suit une loi normale de moyenne $\mu = 250$ et d'écart type σ, donc d'après le cours :

$Y = \frac{X-250}{\sigma}$ **suit une loi normale centrée réduite.**

---

2. b) Démontrer que $P\left(Y \leq -\frac{13}{\sigma}\right) = \mathbf{0,14}$.

D'après l'énoncé, on sait que $P(X \leq 237) = 0{,}14$ donc $P(X - 250 \leq -13) = 0{,}14$ soit

$$P\left(\frac{X-250}{\sigma} \leq -\frac{13}{\sigma}\right) = 0{,}14 \Leftrightarrow \boldsymbol{P\left(Y \leq -\frac{13}{\sigma}\right) = 0,14}$$

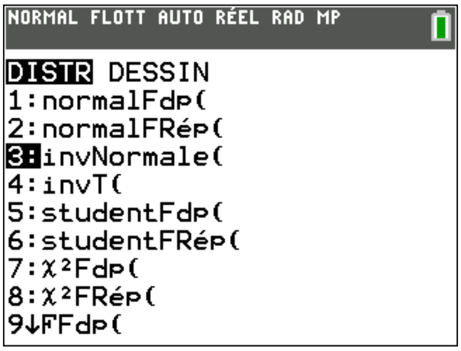
---

2. c) En déduire la valeur de σ arrondie à l'entier.

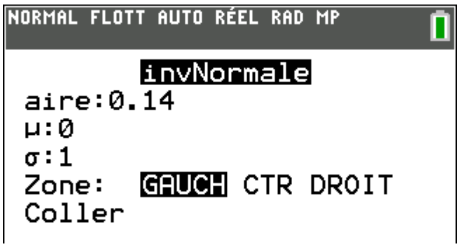
D'après 2.b. $P\left(Y \leq -\frac{13}{\sigma}\right) = 0{,}14$ avec Y une aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite.

Pour trouver σ, on va utiliser notre TI83 Premium CE :

On appuie sur [2nde] [var] (distrib) puis on choisit **invNormale**

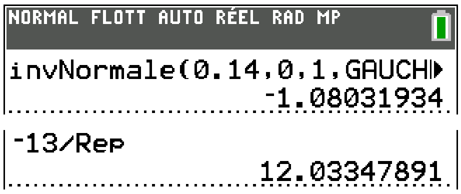


On complète la boite de dialogue :



On trouve donc $-\frac{13}{\sigma} = -1{,}0103$ à 10^{-4} près.

Ainsi $\sigma \approx \frac{13}{1{,}0103}$ donc $\boldsymbol{\sigma = 12}$ arrondie à l'unité près.



---

3. Dans cette question, on admet que σ vaut 12. On désigne par n et m des nombres entiers.

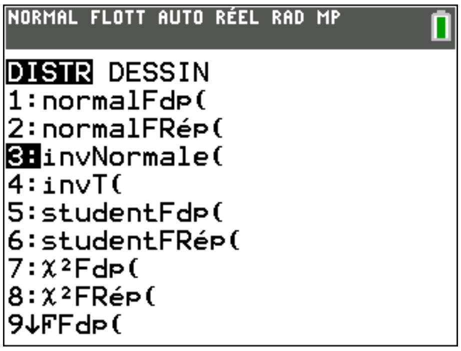
a) Une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme, se trouve dans l'intervalle $[\mathbf{250-n;250+n}]$. Déterminer la plus petite valeur de n pour qu'une barquette soit conforme, avec une probabilité supérieure ou égale à 95 %.

On cherche la plus petite valeur de l'entier n tel que $P(250-n \leq X \leq 250+n) \geq 0{,}95$

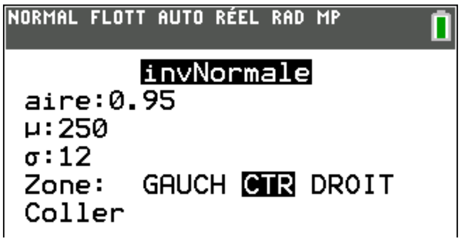
1ère méthode :

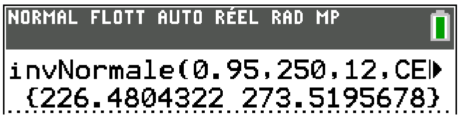
Pour trouver n, on va utiliser notre TI83 Premium CE :

On appuie sur 2nde var (distrib) puis on choisit **`invNormale`**



On complète la boite de dialogue :



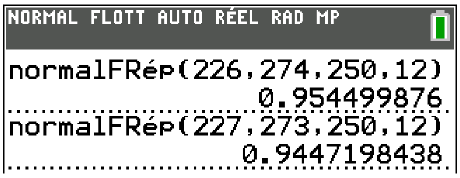


On cherche donc la plus petite valeur de n telle que $250+n \geq 273{,}52$ soit $n \geq 23{,}52$ donc $\mathbf{n=24}$.

Vérifions notre résultat :

$$P(250-48 \leq X \leq 250+24) \approx 0{,}9545$$

$$P(250-47 \leq X \leq 250+23) \approx 0{,}9447$$



Ce qui confirme bien notre résultat.

2ème méthode

On sait d'après le cours que $P(250-2\sigma \leq X \leq 250+2\sigma) \approx 0{,}95$ soit $n \approx 2\sigma$ donc $n=24$.

3. b) On considère dans cette question qu'une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme, se trouve dans l'intervalle $[230 ; m]$. Déterminer la plus petite valeur de m pour qu'une barquette soit conforme, avec une probabilité supérieure ou égale à 95 %.

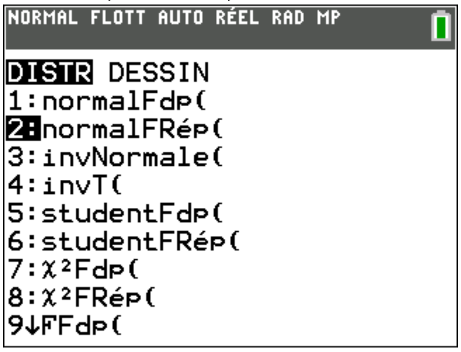
On cherche la plus petite valeur de l'entier m tel que $P(230 \leq X \leq m) \geq 0{,}95$

On va commencer à transformer l'inégalité :

$$P(230 \leq X \leq m) \geq 0{,}95$$
$$\Leftrightarrow P(X \leq m) - P(X \leq 230) \geq 0{,}95$$
$$\Leftrightarrow P(X \leq m) \geq 0{,}95 + P(X \leq 230)$$

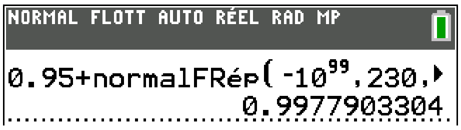
Calculons $0{,}95 + P(X \leq 230)$

On appuie sur 2nde var (distrib) puis on choisit **normalFrép**



On complète la boite de dialogue :

Ainsi $0{,}95 + P(X \leq 230) \approx 0{,}9978$

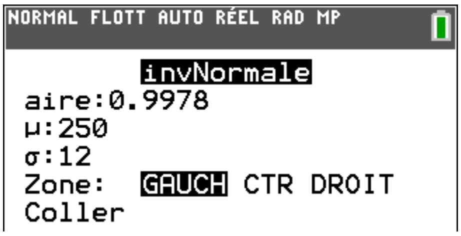


On recherche donc la plus petite valeur de l'entier m telle que $P(X \leq m) \geq 0{,}9978$ à 10^{-4} près.

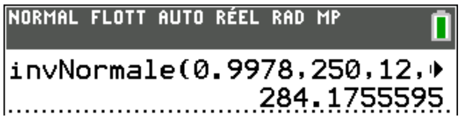
Pour trouver n, on va utiliser notre TI83 Premium CE :

On appuie sur 2nde var (distrib) puis on choisit **invNormale**

On complète la boite de dialogue :



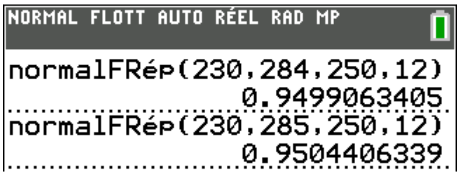
On cherche donc la plus petite valeur de m telle que $m \geq 284{,}18$ ce qui nous donne $\boldsymbol{m = 285}$.



Vérifions notre résultat :

$$P(230 \leq X \leq 284) \approx 0{,}9499$$

$$P(230 \leq X \leq 285) \approx 0{,}9504$$



Ce qui confirme bien notre résultat.