EXERCICE 3 **7 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = xe^{1-x^2}$.

1. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   Indication : on pourra utiliser que pour tout réel x différent de 0, $f(x) = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$.

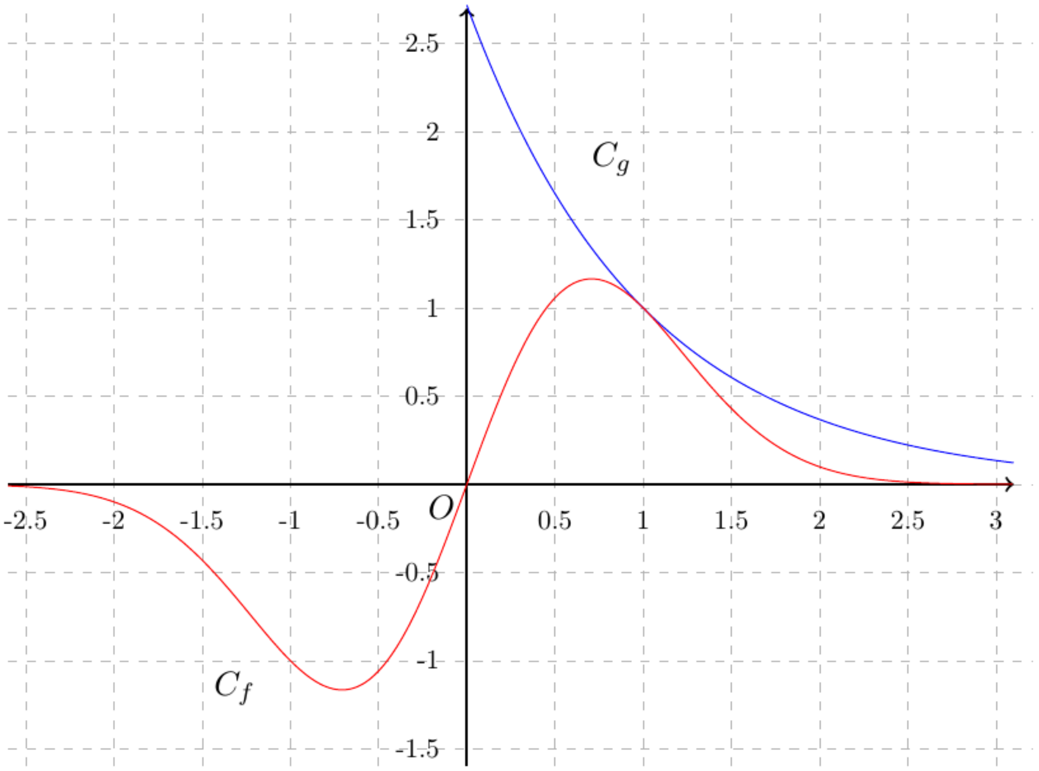
   On admettra que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à 0.

2. a. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa dérivée.
   Démontrer que pour tout réel x,
   $$f'(x) = (1-2x^2)e^{1-x^2}.$$
   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

Partie B

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $(x) = e^{1-x}$.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives C_f et C_g respectivement des fonctions f et g.



Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?
2. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]-\infty; 0]$, $f(x) < g(x)$.
3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0; +\infty[$.

On pose, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.

a. Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$f(x) \leq g(x) \text{ équivaut à } \Phi(x) \leq 0.$$

On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.

b. On admet que la fonction Φ est dérivable sur $]0; +\infty[$. Dresser le tableau de variation de la fonction Φ . (Les limites en 0 et $+\infty$ ne sont pas attendues.)

c. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(\mathrm{x}) \leq 0$.

4. a. La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle valide ?

b. Montrer que C_f et C_g ont un unique point commun, noté A.

c. Montrer qu'en ce point A, ces deux courbes ont la même tangente.

Partie C

1. Trouver une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire la valeur de $\int_0^1 \left(e^{1-x} - xe^{1-x^2}\right) dx$.
3. Interpréter graphiquement ce résultat.

CORRECTION

EXERCICE 3 — 7 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = xe^{1-x^2}$.

1. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Indication : on pourra utiliser que pour tout réel x différent de 0, $f(x) = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ d'après le cours} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par composition} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2} = +\infty \end{array}$$

$$\text{Ainsi} \quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e}{x} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par produit} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0 \end{array}$$

Conclusion : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

---

2. a. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa dérivée.
Démontrer que pour tout réel x,

$$\boldsymbol{f'(x) = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = xe^{1-x^2}$ donc $f'(x) = 1 \times e^{1-x^2} + x(-2x)e^{1-x^2}$

Ainsi $\boldsymbol{f'(x) = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}}$

---

2. b. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e^{1-x^2} > 0$ ddonc $f'(x)$ est du signe de $1 - 2x^2$.

$$1 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ainsi pour tout $x \in \left]-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ $f'(x) > 0$ donc f est croissante sur $\left]-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$.

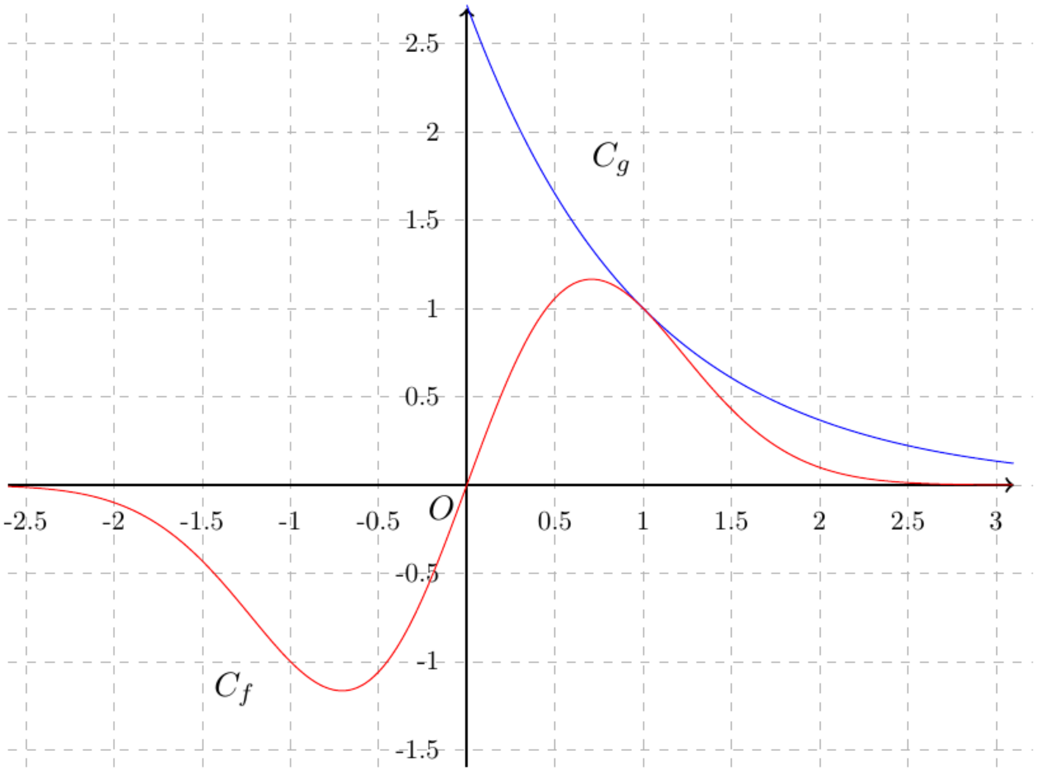
Et f est décroissante sur $\left]-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ et f est décroissante sur $\left]\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right[$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{\sqrt{2e}}{2}$	↗	$\frac{\sqrt{2e}}{2}$	↘	0

Partie B

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $(x) = e^{1-x}$.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives C_f et C_g respectivement des fonctions f et g.



1. Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?

On peut conjecturer que **C_g est au-dessus de C_f**.

---

2. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]-\infty; 0]$, $f(x) < g(x)$.

Pour tout $x \in]-\infty; 0]$ $g(x) - f(x) = e^{1-x} - xe^{1-x^2} = (1 - xe^{x-x^2})e^{1-x}$.

Or si $x \leq 0$ alors $-x \geq 0$ donc $-xe^{x-x^2} \geq 0$ et donc $1 - xe^{x-x^2} \geq 1 > 0$ or $e^{1-x} > 0$

ce qui prouve que pour tout $x \in]-\infty; 0]$ d'où $(1 - xe^{x-x^2})e^{1-x} > 0$ soit $g(x) - f(x) > 0$

Conclusion : **Pour tout $x \in]-\infty; 0]$ $f(x) < g(x)$**

---

3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0; +\infty[$.

On pose, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.

a. Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$f(x) \leq g(x) \text{ équivaut à } \Phi(x) \leq 0.$$

On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $(x) = 0$.

Pour tout réel x strictement positif $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow xe^{1-x^2} \leq e^{1-x}$ les deux membres sont positifs stricts donc $\ln\left(xe^{1-x^2}\right) \leq \ln(e^{1-x})$

$\Leftrightarrow \ln x + \ln\left(e^{1-x^2}\right) \leq \ln(e^{1-x})$ car $x > 0$ et $e^{1-x^2} > 0$.

$\Leftrightarrow \ln x + 1 - x^2 \leq 1 - x$

$\Leftrightarrow \ln x - x^2 + x \leq 0 \Leftrightarrow \Phi(x) \leq 0$

Conclusion : **Pour tout réel x strictement positif $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow \Phi(x) \leq 0$**

---

3. b. On admet que la fonction Φ est dérivable sur $]0; +\infty[$. Dresser le tableau de variation de la fonction . (Les limites en 0 et $+\infty$ ne sont pas attendues.)

Pour tout réel $x \in \left]0 ; +\infty\right[$ $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$ donc $\Phi'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1 = \frac{1-2x^2+x}{x}$

Ainsi pour tout réel $x \in \left]0 ; +\infty\right[$ $\Phi'(x) = \frac{-2x^2+x+1}{x}$

$x \in \left]0 ; +\infty\right[$ donc $\Phi'(x)$ est du signe de $-2x^2 + x + 1$ qui est un polynôme du second degré.

Calculons le discriminant :

$$\Delta = 1^2 - 4 \times (-2) \times 1 = 9$$

$\Delta > 0$ il y a donc deux racines distincts : $x_1 = \frac{-1-\sqrt{9}}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{9}}{-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$

On en déduit le signe de $\Phi'(x)$ puis le tableau de variations de Φ :

x	0		1		$+\infty$
$\Phi'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$\Phi(x)$	‖	$\nearrow$	0	$\searrow$	

On calcule $\Phi(1) = \ln 1 - 1^2 + 1 = 0$

---

3. c. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) \leq 0$.

D'après le tableau de variation de la question 3.a. on a : **pour tout $x \in \left]0\,;+\infty\right[$ $\Phi(x) \leq 0$**.

---

4. a. La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle valide ?

D'après B.2. on a montré que pour tout $x \in]-\infty; 0]$ $f(x) < g(x)$

D'autre part, d'après B.3.c pour tout $x \in \left]0\,;+\infty\right[$ $\Phi(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$ d'après 3.a.

Conclusion : Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leq g(x)$ **ce qui prouve bien notre conjecture**, c'est-à-dire que C_f est toujours au dessous de C_g.

---

4. b. Montrer que C_f et C_g ont un unique point commun, noté A.

D'après l'énoncé, $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.

Or d'après le tableau de variation l'équation $\Phi(x) = 0$ admet une unique solution $x = 1$.

Conclusion : **C_f et C_g ont un unique point commun, le point $A(1; 1)$.**

---

4. c. Montrer qu'en ce point A, ces deux courbes ont la même tangente.

D'après A.2.a. on a $f'(1) = (1 - 2 \times 1^2)e^{1-1^2} = -1e^0 = -1$ et $f(1) = 1$
La tangente à C_f au point A a pour équation : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$$\Leftrightarrow y = -(x-1) + 1$$
$$\Leftrightarrow y = -x + 2$$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $g(x) = e^{1-x}$ donc $g'(x) = -e^{1-x}$ ainsi $g'(1) = -e^0 = -1$ et $g(1) = 1$.
La tangente à C_g au point A a pour équation : $y = g'(1)(x-1) + g(1)$

$$\Leftrightarrow y = -(x-1) + 1$$
$$\Leftrightarrow y = -x + 2$$

Conclusion : **Au point $A(1;1)$, les deux courbes C_f et C_g ont la même tangente**.

Partie C

1. Trouver une primitive F de la fonction f sur ℝ.

Pour tout $\in \mathbb{R}$ $f(x) = xe^{1-x^2} = -\frac{1}{2} \times (-2x)e^{1-x^2}$, on reconnait une forme du type $u'e^u$ avec $u(x) = 1 - x^2$ donc $u'(x) = -2x$.

Donc **pour tout $x \in \mathbb{R}$ $F(x) = -\frac{1}{2} \times e^{1-x^2}$**

---

2. En déduire la valeur de $\int_0^1 (e^{1-x} - xe^{1-x^2})dx$.

$$\int_0^1 (e^{1-x} - xe^{1-x^2})dx = \int_0^1 e^{1-x}dx - \int_0^1 xe^{1-x^2}dx = [-e^{1-x}]_0^1 - (F(1) - F(0))$$
$$= -e^{1-1} - (-e^{1-0}) - \left(-\frac{1}{2}e^{1-1^2}\right) + \left(-\frac{1}{2}e^{1-0^2}\right)$$
$$= -1 + e + \frac{1}{2}e^0 - \frac{1}{2}e$$
$$= -1 + e + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e$$

Conclusion : $\boldsymbol{\int_0^1 (e^{1-x} - xe^{1-x^2})dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e}$

---

3. Interpréter graphiquement ce résultat.

L'aire de la partie du plan délimitée par C_f, C_g et la droite d'équation $x = 0$ vaut $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e$ u.a.