EXERCICE 4 **5 points**

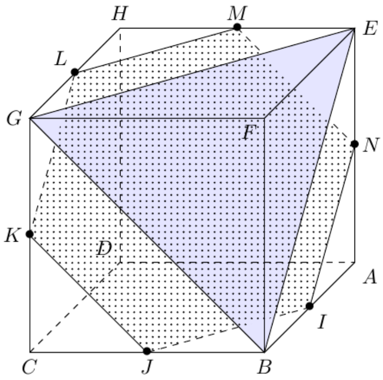
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

ABCDEFGH est un cube d'arête égale à 1.

L'espace est muni du repère orthonormé $(D ; \overrightarrow{DC} ; \overrightarrow{DA} ; \overrightarrow{DH})$.

Dans ce repère, on a :
$D(0;0;0)$, $C(1;0;0)$, $A(0;1;0)$,
$H(0;0;1)$ et $E(0;1;1)$.

Soit I le milieu de $[AB]$.



Soit $\mathcal{P}$ le plan parallèle au plan (BGE) et passant par le point I.

On admet que la section du cube par le plan $\mathcal{P}$ représentée ci-dessus est un hexagone dont les sommets I, J, K, L, M et N appartiennent respectivement aux arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[CG]$, $[GH]$, $[HE]$ et $[AE]$.

1. a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (BGE).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
2. Montrer que le point N est le milieu du segment $[AE]$.
3. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HB).
   b. En déduire que la droite (HB) et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants en un point T dont on précisera les coordonnées.
4. Calculer, en unités de volume, le volume du tétraèdre $FBGE$.

CORRECTION

EXERCICE 4 **5 points**

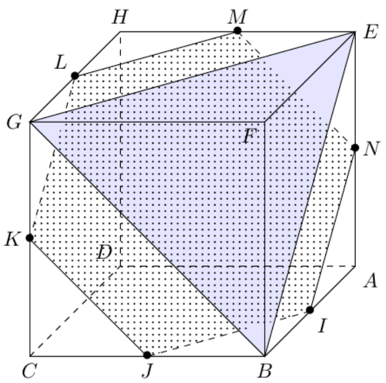
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

ABCDEFGH est un cube d'arête égale à 1.

L'espace est muni du repère orthonormé $(D; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DH})$.

Dans ce repère, on a :
$D(0;0;0)$, $C(1;0;0)$, $A(0;1;0)$,
$H(0;0;1)$ et $E(0;1;1)$.

Soit I le milieu de $[AB]$.



Soit $\mathcal{P}$ le plan parallèle au plan (BGE) et passant par le point I.

1. a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (BGE).

$D\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et $F\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$B\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $G\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $E\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

Les points B, G et E forment un plan, donc $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BE}$ ne sont pas colinéaires.

D'autre part $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{BG} = 1\times 0 + 1\times(-1) + 1\times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{DF} \perp \overrightarrow{BG}$

Et $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{BE} = 1\times(-1) + 1\times 0 + 1\times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{DF} \perp \overrightarrow{BE}$

Ce qui prouve que **$\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (BGE).**

---

1. b. En déduire une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

$\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathcal{P}$ donc $\mathcal{P}$ admet une équation du type

$$1\times x + 1\times y + 1\times z + d = 0 \Leftrightarrow x + y + z + d = 0$$

I est le milieu du segment $[AB]$ avec $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ donc $I\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$

Calculons d : $I \in \mathcal{P}$ donc $x_B + y_B + z_B + d = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -\frac{3}{2}$

Conclusion : **$\mathcal{P}$: $x + y + z - 2 = 0$**

---

2. Montrer que le point N est le milieu du segment $[AE]$.

Déterminons une équation de la droite (AE) avec $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $E\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (AE) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires$\Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AE} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y=0 \\ z=k \end{cases}$.

Donc (AE) : $\begin{cases} x=1-k \\ y=k \\ z=k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$.

$N\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (AE)\cap \mathcal{P} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=k \\ x+y+z-\frac{3}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=k \\ 1+0+k-\frac{3}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=\frac{1}{2} \\ k=\frac{1}{2} \end{cases}$, ainsi $N\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

D'autre part $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $E\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ donc le milieu du segment $[AE]$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{1+1}{2}\\\frac{0+0}{2}\\\frac{0+1}{2}\end{pmatrix}$ soit le point N.

Conclusion : $\boldsymbol{N}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{0}\\\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\end{pmatrix}$ **est le milieu du segment** $[\boldsymbol{AE}]$.

---

3. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $(\boldsymbol{HB})$.

Déterminons une équation de la droite (HB) avec $H\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (HB) \Leftrightarrow \overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{HB}$ sont colinéaires$\Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{HB} \Leftrightarrow \begin{cases} x=k \\ y=k \\ z-1=-k \end{cases}$.

Donc $(\boldsymbol{HB})$: $\begin{cases} \boldsymbol{x}=\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{z}=\mathbf{1}-\boldsymbol{k} \end{cases}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$.

---

3. b. En déduire que la droite (HB) et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants en un point T dont on précisera les coordonnées.

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (HB)\cap\mathcal{P} \Leftrightarrow \begin{cases} x=k\\ y=k\\ z=1-k\\ x+y+z-\frac{3}{2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=k\\ y=k\\ z=1-k\\ k+k+1-k-\frac{3}{2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}\\ y=\frac{1}{2}\\ z=\frac{1}{2}\\ k=\frac{1}{2}\end{cases}, \text{ ainsi } T\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Conclusion : $\boldsymbol{T\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}}$ **est l'intersection de (HB) et $\mathcal{P}$.**

---

4. Calculer, en unités de volume, le volume du tétraèdre $FBGE$.

Le tétraèdre $FBGE$ est rectangle en F.

L'aire du triangle GFB est $\frac{1}{2}\sqrt{2}\times 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et la hauteur du tétraèdre $FBGE$ issue de E a pour longueur $FE = 1$.

Conclusion : Le volume du tétraèdre est $V = \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times 1$ donc $\boldsymbol{V = \frac{\sqrt{2}}{6}}$ **u.v.**
