EXERCICE 2 **3 points**
Commun à tous les candidats

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z - 2| = 1$.

1. Justifier que $\mathcal{C}$ est un cercle, dont on précisera le centre et le rayon.
2. Soit a un nombre réel. On appelle $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = ax$.
   Déterminer le nombre de points d'intersection entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ en fonction des valeurs du réel a

---

CORRECTION

EXERCICE 2 **3 points**

Commun à tous les candidats

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z-2| = 1$.

1. Justifier que $\mathcal{C}$ est un cercle, dont on précisera le centre et le rayon.

On sait que $|z-2| = 1 \Leftrightarrow AM = 1$ avec $A(2)$.
Donc **M appartient au cercle de centre A et de rayon 1**.

---

2. Soit a un nombre réel. On appelle $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = ax$.
Déterminer le nombre de points d'intersection entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ en fonction des valeurs du réel a

On pose $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ainsi $M \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} |z-2| = 1 \\ y = ax \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 1 \\ y = ax \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 1 \\ y = ax \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 + a^2x^2 = 1 \\ y = ax \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+a^2)x^2 - 4x + 3 = 0 \\ y = ax \end{cases}$

Résolvons $(1+a^2)x^2 - 4x + 3 = 0$:
$1 + a^2 \neq 0$ on est donc en présence d'une équation du second degré, calculons le discriminant :
$\Delta = (-4)^2 - 4 \times (1+a^2) \times 3$ donc $\Delta = 4 - 12a^2$.
1^er^ cas : $\Delta < 0$:

Ce cas correspond à $4 - 12a^2 < 0 \Leftrightarrow a^2 > \frac{1}{3} \Leftrightarrow a < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $a > \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow a < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $a > \frac{\sqrt{3}}{3}$

Dans ce cas l'équation n'admet pas de solution.
2^ème^ cas : $\Delta = 0$:

Dans ce cas $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et l'équation admet une unique solution : $x = \frac{4}{2(1+a^2)} = \frac{2}{1+a^2}$

Ainsi dans ces deux cas $x = \frac{2}{1+\frac{1}{3}}$ soit $x = \frac{3}{2}$.

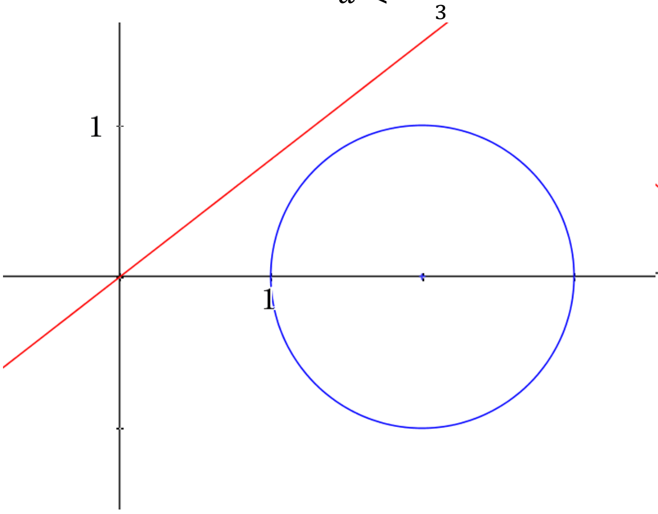
3^ème^ cas : $\Delta > 0$:

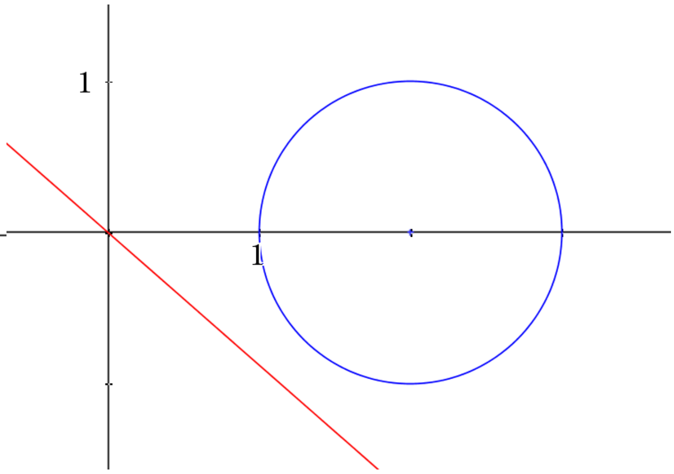
Dans ce cas $-\frac{\sqrt{3}}{3} < a < \frac{\sqrt{3}}{3}$ et l'équation admet deux solutions distinctes :

$$x = \frac{4 - \sqrt{4 - 12a^2}}{2(1+a^2)} \text{ ou } x = \frac{4 + \sqrt{4 - 12a^2}}{2(1+a^2)} \Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{1 - 3a^2}}{1+a^2} \text{ ou } x = \frac{1 + \sqrt{1 - 3a^2}}{1+a^2}$$

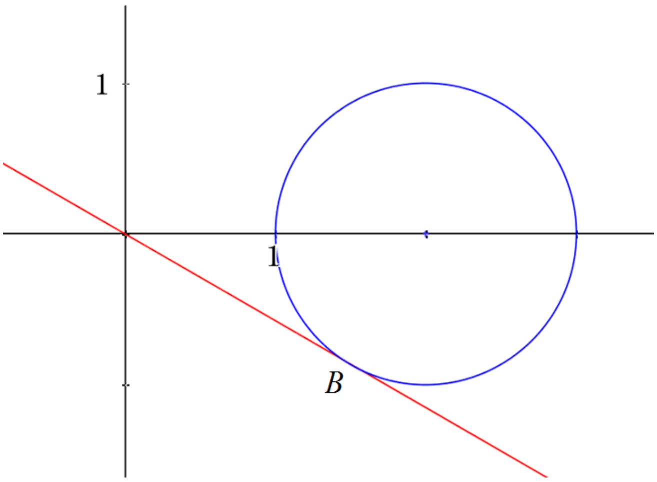
Conclusion :

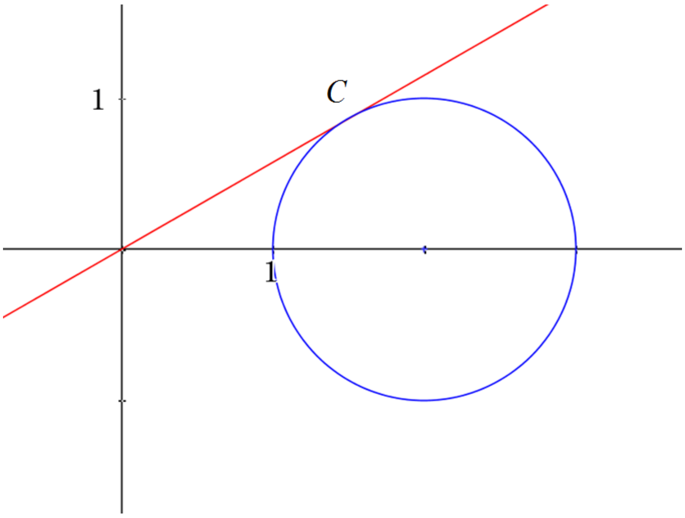
Si $a < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $a > \frac{\sqrt{3}}{3}$ dons ce cas $\mathcal{C} \cap \mathfrak{D} = \emptyset$





Si $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ on a $\mathcal{C} \cap \mathfrak{D} = \{B\}$ avec $B\left(\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et si $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ on a $\mathcal{C} \cap \mathfrak{D} = \{C\}$ avec $C\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$





Si $-\frac{\sqrt{3}}{3} < a < \frac{\sqrt{3}}{3}$ alors $\mathcal{C} \cap \mathfrak{D} = \{D; E\}$ avec $D\left(\frac{1-\sqrt{1-3a^2}}{1+a^2}; a\frac{1-\sqrt{1-3a^2}}{1+a^2}\right)$ et $E\left(\frac{1+\sqrt{1-3a^2}}{1+a^2}; a\frac{1+\sqrt{1-3a^2}}{1+a^2}\right)$