EXERCICE 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On considère l'équation suivante d'inconnues x et y entiers relatifs :

$$7x - 3y = 1 \quad (E)$$

1. Un algorithme incomplet est donné ci-dessous. Le recopier et le compléter, en écrivant ses lignes manquantes (1) et (2) de manière à ce qu'il donne les solutions entières (x, y) de l'équation (E) vérifiant $-5 \leq x \leq 10$ et $-5 \leq x \leq 10$.

```
Variables :    X est un nombre entier
               Y est un nombre entier
Début :        Pour X variant de −5 à 10
                   (1) ............................
                       (2) ............................
                       Alors Afficher X et Y
                       Fin Si
                   Fin Pour
               Fin Pour
Fin
```

2. a. Donner une solution particulière de l'équation (E).
   b. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).
   c. Déterminer l'ensemble des couples (x, y) d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) tels que

$$-5 \leq x \leq 10 \text{ et } -5 \leq y \leq 10.$$

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$
On considère la droite $\mathfrak{D}$ d'équation

$$7x - 3y - 1 = 0$$

On définit la suite (A_n) de points du plan de coordonnées $(x_n; y_n)$ vérifiant pour tout n entier naturel :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{cases} \text{et} \begin{cases} x_{n+1} = -\frac{13}{2}x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = -\frac{35}{2}x_n + 8y_n \end{cases}$$

1. On note M la matrice $\begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & 3 \\ -\frac{35}{2} & 8 \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$
   a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = MX_n$.
   b. Sans justifier, exprimer pour tout entier naturel n, X_n en fonction de M^n et X_0.

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$ et on admet que la matrice inverse de P, notée P^{-1}, est définie par $P^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.
   a. Vérifier que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.
   b. Pour tout entier naturel n, donner D^n sans justification.
   c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $M^n = PD^nP^{-1}$.
3. On admet que, pour tout entier naturel n, $M^n = \begin{pmatrix} -14 + \frac{15}{2^n} & 6 - \frac{6}{2^n} \\ -35 + \frac{35}{2^n} & 15 - \frac{14}{2^n} \end{pmatrix}$.

   En déduire que, pour tout entier naturel n, une expression de x_n et de y_n en fonction de n
4. Montrer que, pour tout entier naturel n, le point A_n appartient à la droite $\mathfrak{D}$.

CORRECTION

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'équation suivante d'inconnues x et y entiers relatifs :

$$7x - 3y = 1 \quad (E)$$

1. ***Un algorithme incomplet est donné ci-dessous. Le recopier et le compléter, en écrivant ses lignes manquantes (1) et (2) de manière à ce qu'il donne les solutions entières (x, y) de l'équation (E) vérifiant $-5 \leq x \leq 10$ et $-5 \leq y \leq 10$.***

```
Variables :   X est un nombre entier
              Y est un nombre entier
Début :       Pour X variant de −5 à 10
                  (1) Pour Y variant de -5 à 10
                      (2) Si 7X − 3Y = 1
                      Alors Afficher X et Y
                      Fin Si
                  Fin Pour
              Fin Pour
Fin
```

2. a. ***Donner une solution particulière de l'équation (E).***

On peut utiliser l'algorithme précédent pour trouver une solution particulière.
Ecrivons le programme correspondant avec notre TI83 Premium CE :

On appuie sur [prgm] et on choisit **NOUVEAU** : puis **Créer**.

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
EXÉC ÉDIT NOUVEAU
1:Créer
```

On écrit le nom de son programme : ici on a choisit **BACSPE**.

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
PROGRAMME
Nom=BACSPE
```

Voici l'algorithme traduit en langage TI83 :

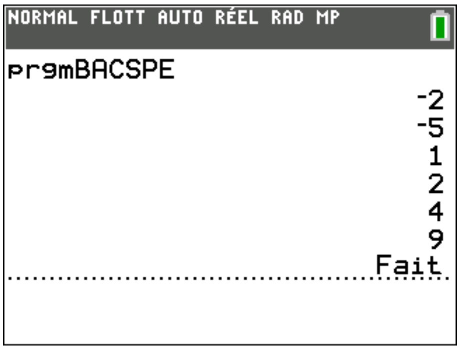
```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
PROGRAM:BACSPE
:For(X,-5,10)
:For(Y,-5,10)
:If 7X-3Y=1
:Then
:Disp X,Y
:End
:End
:End
```

Puis on sort de l'éditeur en appuyant sur [2nde] [mode] (quitter)

Pour exécuter le programme on appuie sur dessin C prgm puis on choisit le nom de son programme BACSPE et on valide en appuyant sur précéd entrer.

On trouve 3 couples solution :

$$(-2,-5)\ ;(1,2);(4,9)$$



Conclusion : **$(x_0, y_0) = (1, 2)$ est une solution particulière de (E).**

---

2. b. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Résolvons $7x - 3y = 1$: On sait que $7x_0 - 3y_0 = 1$

Ainsi $(E) \Leftrightarrow 7x - 3y = 7x_0 - 3y_0 \Leftrightarrow 7(x - x_0) = 3(y - y_0)$

On en déduit que 7 divise $3(y - y_0)$ or $\text{pgcd}(7,3) = 1$ donc d'après le théorème de Gauss, 7 divise $y - y_0$
Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y - y_0 = 7k$.

Dans ce cas $7(x - x_0) = 3(y - y_0) \Leftrightarrow 7(x - x_0) = 3 \times 7k \Leftrightarrow x - x_0 = 3k$

En résumé on obtient : $\begin{cases} x - x_0 = 3k \\ y - y_0 = 7k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + 3k \\ y = y_0 + 7k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = 2 + 7k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

Vérification : $7x - 3y = 7(1 + 3k) - 3(2 + 7k) = 7 + 21k - 6 - 21k = 1$

Conclusion : **Les solutions de (E) sont : $\begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = 2 + 7k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$**

---

2. c. Déterminer l'ensemble des couples (x, y) d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) tels que

$$\boldsymbol{-5 \leq x \leq 10 \text{ et} -5 \leq y \leq 10.}$$

On peut utiliser les résultats de l'algorithme que nous avons exécuté dans la question 2.a. qui affiche toutes les couples (X, Y) solution de (E) avec $-5 \leq X \leq 10$ et $-5 \leq Y \leq 10$,

On peut aussi effectuer la recherche« à la main » :

$$\begin{aligned} & -5 \leq x \leq 10 \text{ et } -5 \leq y \leq 10 \\ \Leftrightarrow & -5 \leq 1 + 3k \leq 10 \text{ et } -5 \leq 2 + 7k \leq 10 \\ \Leftrightarrow & -2 \leq k \leq 3 \text{ et } -1 \leq k \leq \frac{8}{7} \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow -1 \leq k \leq 1$
Si $k = -1$ alors $(x, y) = (-2, -5)$
Si $k = 0$ alors $(x, y) = (1,2)$
Si $k = 1$ alors $(x, y) = (4,9)$

Conclusion : **Les solutions de (E) telles que $-5 \leq x \leq 10$ et $-5 \leq y \leq 10$ sont :**

$(-2, -5)$; $(1, 2)$ et $(4, 9)$

Partie B

On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation

$$\mathbf{7x - 3y - 1 = 0}$$

On définit la suite (A_n) de points du plan de coordonnées $(x_n; y_n)$ vérifiant pour tout n entier naturel :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{cases} et \begin{cases} x_{n+1} = -\frac{13}{2}x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = -\frac{35}{2}x_n + 8y_n \end{cases}$$

1. On note M la matrice $\begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & 3 \\ -\frac{35}{2} & 8 \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = MX_n$.

$$MX_n = \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & 3 \\ -\frac{35}{2} & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{2}x_n + 3y_n \\ -\frac{35}{2}x_n + 8y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

Conclusion : On a bien montré que $X_{n+1} = MX_n$

---

1. b. Sans justifier, exprimer pour tout entier naturel n, X_n en fonction de M^n et X_0.

Pour tout entier naturel n, $X_n = M^n X_0$.

---

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$ *et on admet que la matrice inverse de* P*, notée* P^{-1}*, est définie par* $P^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

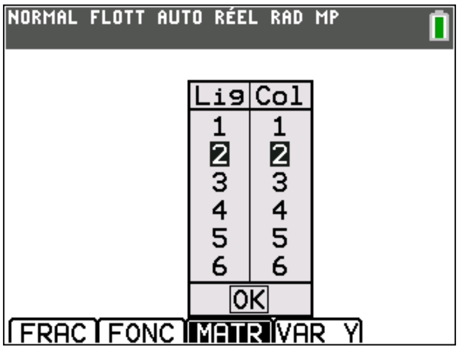
a. Vérifier que $P^{-1}MP$ *est une matrice diagonale* D *que l'on précisera.*

$$P^{-1}M = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & 3 \\ -\frac{35}{2} & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \times \left(-\frac{13}{2}\right) - 3 \times \left(-\frac{35}{2}\right) & 7 \times 3 - 3 \times 8 \\ -5 \times \left(-\frac{13}{2}\right) + 2 \times \left(-\frac{35}{2}\right) & -5 \times 3 + 2 \times 8 \end{pmatrix}$$

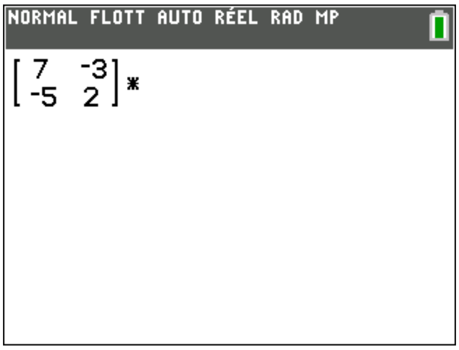
$$= \begin{pmatrix} -\frac{91}{2} + \frac{105}{2} & -3 \\ \frac{65}{2} - \frac{70}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -\frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Vérifions ce calcul avec notre TI83 Premium CE :

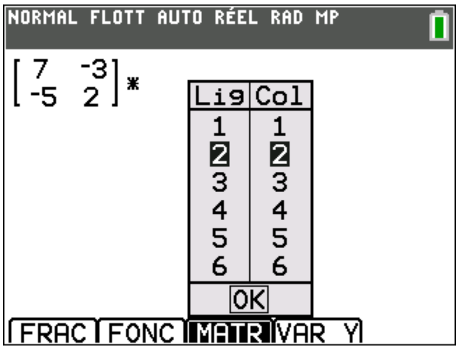
On appuie sur [verr A alpha] [format f3 zoom] pour faire apparaitre le raccourci création de matrice et on choisit la taille de sa matrice 2x2 :



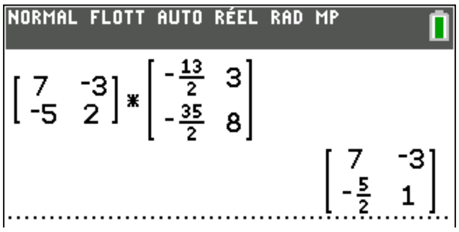
On entre les coefficients de la première matrice :



On appuie sur [verr A alpha] [format f3 zoom] pour faire créer une seconde matrice 2x2 :



Notre calcul est bien vérifié.

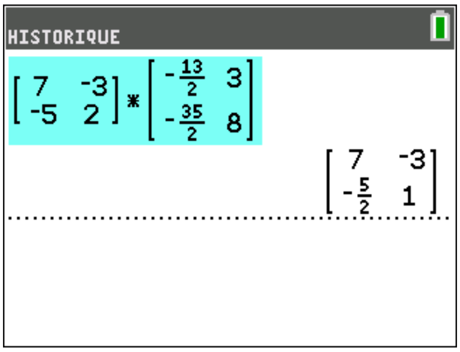


$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -\frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\times(-2)-3\times(-5) & 7\times(-3)-3\times(-7) \\ -\frac{5}{2}\times(-2)+1\times(-5) & -\frac{5}{2}\times(-3)+1\times(-7) \end{pmatrix}$$

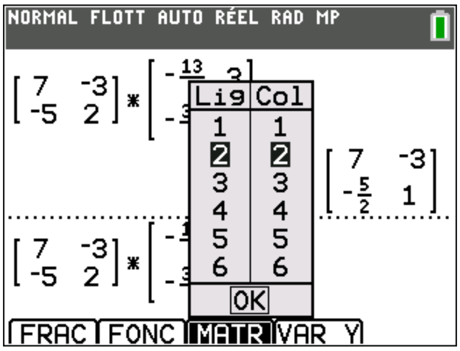
$$= \begin{pmatrix} -14+15 & -21+21 \\ 5-5 & -\frac{5}{2}\times(-3)+1\times(-7) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

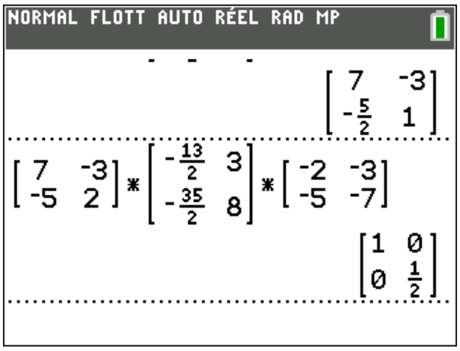
Vérifions ce dernier calcul avec notre TI83 Premium CE :
Pour afficher les produit précédent, on appuie deux fois sur [^] pour sélectionner le produit précédent, puis appuyer sur [entrer]



On appuie sur [alpha] [zoom] pour faire apparaitre le raccourci création de matrice et on choisit la taille de sa matrice 2x2 :



On entre les coefficients de la troisième matrice et on valide. On obtient :
Ce qui vérifie bien notre calcul.



Conclusion : $\boldsymbol{P^{-1}MP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$ **qui est bien une matrice diagonale**.

---

2. b. Pour tout entier naturel n, donner D^n sans justification.

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donc pour tout entier naturel n, donner $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$ donc $\boldsymbol{D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}}$.

---

2. c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $M^n = PD^nP^{-1}$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $M^n = PD^nP^{-1}$:
Initialisation : Montrons que la propriété est vraie en rang 0 :

$M^0 = I$ et $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$, la proposition est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons que la proposition est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ fixé c'est-à-dire $M^n = PD^nP^{-1}$ et montrons que la proposition est vraie au rang $n+1$ c'est-à-dire $M^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$

On a $M^{n+1} = M^n \times M = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1}$ d'après l'hypothèse de récurrence et d'après 2.b.
$= PD^nIDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$

La proposition est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a donc montré que **pour tout $n \in \mathbb{N}$: $M^n = PD^nP^{-1}$.**

---

3. On admet que, pour tout entier naturel n, $M^n = \begin{pmatrix} -14 + \frac{15}{2^n} & 6 - \frac{6}{2^n} \\ -35 + \frac{35}{2^n} & 15 - \frac{14}{2^n} \end{pmatrix}$.

En déduire que, pour tout entier naturel n, une expression de x_n et de y_n en fonction de n

D'après B.1.b pour tout entier naturel n, $X_n = M^nX_0$, donc $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 + \frac{15}{2^n} & 6 - \frac{6}{2^n} \\ -35 + \frac{35}{2^n} & 15 - \frac{14}{2^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ainsi $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(-14 + \frac{15}{2^n}\right) \times 1 + \left(6 - \frac{6}{2^n}\right) \times 2 \\ \left(-35 + \frac{35}{2^n}\right) \times 1 + \left(15 - \frac{14}{2^n}\right) \times 2 \end{pmatrix}$ soit $\begin{cases} x_n = \left(-14 + \frac{15}{2^n}\right) \times 1 + \left(6 - \frac{6}{2^n}\right) \times 2 \\ y_n = \left(-35 + \frac{35}{2^n}\right) \times 1 + \left(15 - \frac{14}{2^n}\right) \times 2 \end{cases}$

D'où $\boldsymbol{\begin{cases} x_n = -2 + \frac{3}{2^n} \\ y_n = -5 + \frac{7}{2^n} \end{cases}}$.

---

4. Montrer que, pour tout entier naturel n, le point A_n appartient à la droite $\mathcal{D}$.

La droite $\mathcal{D}$ a pour équation : $7x - 3y - 1 = 0$.

Calculons : $7x_n - 3y_n - 1 = 7\left(-2 + \frac{3}{2^n}\right) - 3\left(-5 + \frac{7}{2^n}\right) - 1 = -14 + \frac{21}{2^n} + 15 - \frac{21}{2^n} - 1 = 0$

Conclusion : $\boldsymbol{A_n(x_n, y_n) \in \mathcal{D}}$.