EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Les valeurs approchées des résultats seront données à 10^{-4} près.
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 65 % de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :

- à la sortie de la machine A, 8 % des ampoules présentent un défaut;
- à la sortie de la machine B, 5 % des ampoules présentent un défaut.

On définit les événements suivants :

A : « l'ampoule provient de la machine A » ;

B : « l'ampoule provient de la machine B » ;

D : « l'ampoule présente un défaut ».

1. On prélève une ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.
   a. Construire un arbre pondéré représentant la situation.
   b. Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0,9305.
   c. L'ampoule tirée est sans défaut.
   Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.

2. On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à tirages avec remise.
   Calculer la probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut.

Partie B

1. On rappelle que si T suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ étant un réel strictement positif) alors pour tout réel positif a, $P(T \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\, dx$
   a. Montrer que $P(T \geq a) = e^{-\lambda a}$
   b. Montrer que si T suit une loi exponentielle alors pour tous les réels positifs t et a on a
$$P_{T\geq t}(T \geq t + a) = P(T \geq a)$$
2. Dans cette partie, la durée de vie en heures d'une ampoule sans défaut est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle d'espérance 10000.
   a. Déterminer la valeur exacte du paramètre λ de cette loi.
   b. Calculer la probabilité $P(T \geq 5000)$
   c. Sachant qu'une ampoule sans défaut a déjà fonctionné pendant 7000 heures, calculer la probabilité que sa durée de vie totale dépasse 12000 heures.

Partie C

L'entreprise a cherché à améliorer la qualité de sa production et affirme qu'il n'y a pas plus de 6 % d'ampoules défectueuses dans sa production.
Une association de consommateurs réalise un test sur un échantillon et obtient 71 ampoules défectueuses sur 1000.

1. Dans le cas où il y aurait exactement 6 % d'ampoules défectueuses, déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'ampoules défectueuses sur un échantillon aléatoire de taille 1000.
2. A-t-on des raisons de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise?

CORRECTION

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. On prélève une ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.

a. Construire un arbre pondéré représentant la situation.

D'après l'énoncé, « la machine A fournit 65 % de la production » donc

$$p(A) = 0{,}65$$

Et « la machine B fournit le reste » d'où

$$p(B) = 0{,}35$$

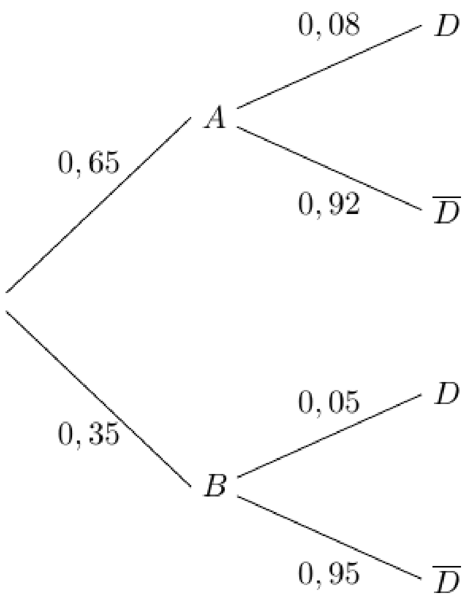
De plus « à la sortie de la machine A, 8 % des ampoules présentent un défaut » soit

$$p_A(D) = 0{,}08$$

Et enfin « à la sortie de la machine B, 5 % des ampoules présentent un défaut » ce qui donne

$$p_B(D) = 0{,}05$$

On construit l'arbre pondéré correspondant à cette situation ci-contre :



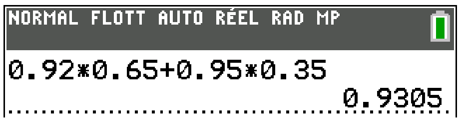
---

1. b. Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0,9305.

On cherche $p(\overline{D})$, d'après le théorème des probabilités totales (on peut aussi dire d'après l'arbre ci-dessus) :

$$p(\overline{D}) = 0{,}92 \times 0{,}65 + 0{,}95 \times 0{,}35$$

Donc $\boldsymbol{p(\overline{D}) = 0,9305}$



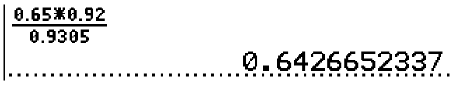
---

1. c. L'ampoule tirée est sans défaut.
Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.

On cherche $p_{\overline{D}}(A)$.

On a d'après le cours $p_{\overline{D}}(A) = \frac{p(\overline{D} \cap A)}{p(\overline{D})} = \frac{0{,}65 \times 0{,}92}{0{,}9305}$

Donc $\boldsymbol{p_{\overline{D}}(A) = 0{,}6427}$ à 10^{-4} près.



---

2. On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à tirages avec remise.
Calculer la probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut.

On est en présence d'une expérience aléatoire à deux issues possibles : L'ampoule n'a pas de défaut ou son contraire qu'on répète 10 fois de suite de façon indépendante. Ceci constitue un schéma de Bernoulli.

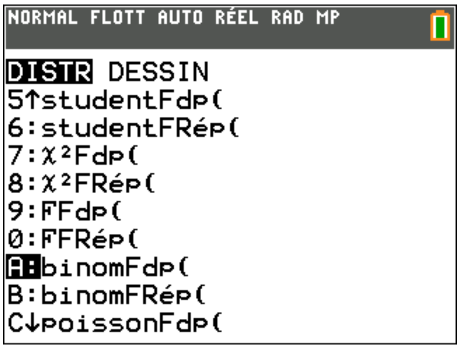
Soit X la variable aléatoire dénombrant les ampoules sans défaut dans le lot de 10 ampoules.
X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}92$.

On cherche $p(X \geq 9) = P(X = 9) + p(X = 10)$.

Retrouvez la séquence ci-dessous en vidéo ! :
https://youtu.be/RJ54TRizqs8

Pour faire ce calcul, on utilise sa TI83 Premium CE :
Calculons tout d'abord $p(X = 9)$:

On appuie sur 2nde var (distrib) puis on choisit **binomFdp(**



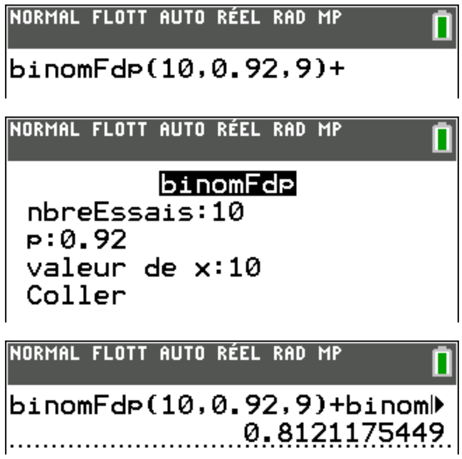
On complète la boite de dialogue :

Et on ajoute $p(X=10)$

On appuie encore sur 2nde var (distrib) puis on choisit **binomFdp(**

On complète la boite de dialogue :

D'où $\boldsymbol{p(X \geq 9) \approx 0,8121}$ à 10^{-4} près.



Partie B

1. On rappelle que si T suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ étant un réel strictement positif) alors pour tout réel positif a, $P(T \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\,dx$

a. Montrer que $P(T \geq a) = e^{-\lambda a}$

$$P(T \geq a) = 1 - p(T < a) = 1 - p(T \leq a) = 1 - \int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

Calculons

$$\int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^a = -e^{-\lambda a} - \left(-e^{-\lambda 0}\right) = 1 - e^{-\lambda a}$$

Ce qui nous donne $P(T \geq a) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda a}\right)$. Conclusion : $\boldsymbol{P(T \geq a) = e^{-\lambda a}}$

---

1. b. Montrer que si T suit une loi exponentielle alors pour tous les réels positifs t et a on a

$$P_{T \geq t}(T \geq t + a) = P(T \geq a)$$

$$P_{T \geq t}(T \geq t + a) = \frac{P\big((T \geq t) \cap (T \geq t + a)\big)}{p(T \geq t)} = \frac{P(T \geq t + a)}{p(T \geq t)} \text{ car } a \geq 0$$

$$\text{Donc } P_{T \geq t}(T \geq t + a) = \frac{e^{-\lambda(t+a)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda(t+a)} \times e^{\lambda t} = e^{-\lambda a} = p(T \geq a)$$

Ce qui prouve bien que $\boldsymbol{P_{T \geq t}(T \geq t + a) = P(T \geq a)}$

---

2. Dans cette partie, la durée de vie en heures d'une ampoule sans défaut est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle d'espérance 10000.

a. Déterminer la valeur exacte du paramètre λ de cette loi.

D'après l'énoncé, $E(T) = 10000$ or d'après le cours $E(T) = \frac{1}{\lambda}$ d'où $\frac{1}{\lambda} = 10000$ soit $\boldsymbol{\lambda = \frac{1}{10000}}$

---

2. b. Calculer la probabilité $P(T \geq 5000)$

$P(T \geq 5000) = e^{-\frac{1}{10000}\times 5000} = e^{-0,5}$

Conclusion :

$\boldsymbol{P(T \geq 5000) = e^{-0,5} = 0,6065}$ à 10^{-4} près.

```
e^-0.5
                0.6065306597
```

---

2. c. Sachant qu'une ampoule sans défaut a déjà fonctionné pendant 7000 heures, calculer la probabilité que sa durée de vie totale dépasse 12000 heures.

On cherche $P_{T\geq 7000}(T \geq 12000) = P_{T\geq 7000}(T \geq 7000 + 5000) = P(T \geq 5000)$ d'après B.1.b.

Donc $\boldsymbol{P_{T\geq 7000}(T \geq 12000) = e^{-0,5} = 0,6065}$ à 10^{-4} près d'après 2.b.

Partie C

L'entreprise a cherché à améliorer la qualité de sa production et affirme qu'il n'y a pas plus de 6 % d'ampoules défectueuses dans sa production.
Une association de consommateurs réalise un test sur un échantillon et obtient 71 ampoules défectueuses sur 1000.

1. Dans le cas où il y aurait exactement 6 % d'ampoules défectueuses, déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'ampoules défectueuses sur un échantillon aléatoire de taille 1000.

$p = 0,06$ et $n = 1000$ on a donc $n \geq 30$ et $np = 60$ donc $np \geq 5$ et $n(1-p) = 940$ d'où $n(1-p) \geq 5$
Les conditions d'application du théorème de l'intervalle de fluctuation sont satisfaites, donc dans 95% des cas la fréquence f d'ampoules défectueuses sur l'échantillon aléatoire de taille 1000 appartient à

$$\left[p - 1,96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$
$$= \left[0,06 - 1,96 \times \frac{\sqrt{0,06\times 0,94}}{\sqrt{1000}} ; 0,06 + 1,96 \times \frac{\sqrt{0,06\times 0,94}}{\sqrt{1000}}\right]$$
$$= \boldsymbol{[0,0452 ; 0,0748]}$$

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
0.06-1.96*√0.06*0.94/√1000
                0.045280413
0.06+1.96*√0.06*0.94/√1000
                0.074719587
```

---

2. A-t-on des raisons de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise?

$f = 0{,}071$ or $f \in [0{,}0452 ; 0{,}0748]$ ce qui ne remet pas en cause l'affirmation de l'entreprise.
